Einführung in Moderne Portfolio-Theorie

Dr. Thorsten Oest

Oktober 2002

Überblick

Grundlegende Frage bei Investitionen:

Wie bestimmt sich eine optimale Strategie für eine Geldanlage?

1. Rendite und Risiko
2. Diversifikation
3. Einführung in Moderne Portfolio-Theorie
   - „Portfolio Selection“ , Harry Markowitz (1959)
   - Harry Markowitz, Merton Miller und William Sharpe: Nobelpreis 1990

Grundbegriffe

- Die Qualität einer Investition wird über die Rendite und das Risiko gemessen.
- Rendite:

  Prozentualer Wertzuwachs pro Jahr

  $$\boxed{R(t_i) = \frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{S(t_i)}}$$

- Risiko:

  Verschiedene Ansätze zum Messen des Risikos

  $$\boxed{\sigma_t^2 = \left\langle \left[R_t - \left\langle R_t \right\rangle\right]^2 \right\rangle}$$

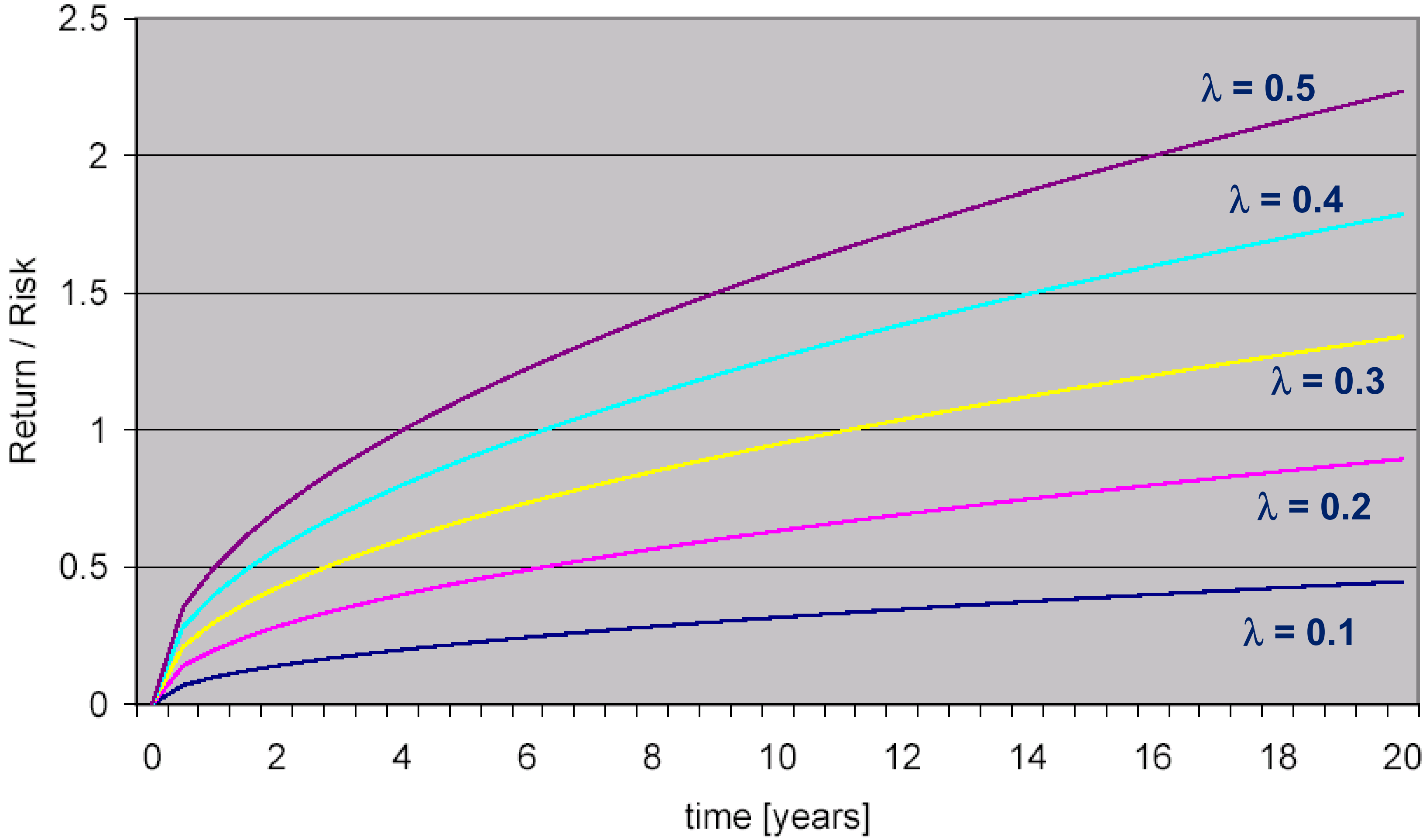
  - Varianz (wird in der Regel verwendet)
  - Höhere Momente $\Rightarrow$ Absicherung gegen hohe Verluste
  - Lower partial Moment $\Rightarrow$ Post-Moderne Portfolio-Theorie
- Bei einem Portfolio sollte die Rendite maximal und das Risiko minimal sein.

Beispiele für Geldanlagen

Asset	Rendite	Risiko
Festgeld (AAA)	≈ 4 %	≈ 0 %
Aktien (DAX)	≈ 6 - 13 %	≈ 20 %

- Je höher das Risiko, desto höher wird die Rendite erwartet.
- **Preis des Risikos:** λ = (Rendite – risikolose Zinsrate) / Risiko
  - skaliert mit $\sqrt{\Delta t}$
  - Für Aktien schwer zu schätzen, da Rendite große Fehler hat. Mit Rendite über Zinsenrate von 2-9 % $\Rightarrow \lambda \approx$ 2-9 % / 20 % = 0.1 – 0.45

Zeitentwicklung Return / Risk



Diversifikation

Asset	Preis	Rendite	Risiko
Aktie 1	50	7 %	10 %
Aktie 2	50	10 %	20 %
Aktie 3	50	13 %	30 %

- Annahme: Preise sind nicht korreliert
- Portfolio aus je einer der drei Aktien:
  - Rendite: $R = (R_1 + R_2 + R_3) / 3 = 10\ \%$
  - Risiko: $\sigma = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} \approx 12.5\ \%$

$\Rightarrow$ Diversifikation reduziert das Risiko, sofern Korrelationen $\neq$ 1

Moderne Portfolio-Theorie

Annahmen:

– Preisänderungen (Renditen) sind normalverteilt.
– Kovarianzmatrix und Rendite sind zeitunabhängig und bekannt.

Problemstellung

Gesucht wird das **optimale Portfolio für eine Geldanlage**:

– Bei vorgegebenem Risiko ist die Rendite maximal.
– Bei vorgegebener Rendite ist das Risiko minimal.

Weiteres Vorgehen:

1. Rendite und Volatilität des Portfolios.
2. Beispiel für zwei Aktien
3. Lösung des Problems für n Aktien.
4. Berücksichtigung einer risikolosen Anlage (Renten).

Rendite und Volatilität des Portfolios

- Preise seinen auf $S_i(t) = 1$ normiert (keine Einschränkung der Allgemeinheit).
- Investition von 1 Währungseinheit in n Aktien mit Anteil λ_i.

Normierung: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

Wert des Portfolios: $\Pi(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot S_i(\tau)$

Rendite:

$$R_\Pi = \frac{\Pi(t+\Delta t) - \Pi(t)}{\Pi(t)} = \frac{\Pi(t+\Delta t) - 1}{1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot [S_i(t+\Delta t) - 1]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot R_i$$

Volatilität des Portfolios

$$R_\Pi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot R_i$$

Falls Volatilität klein, ist $\sigma_{\text{log-Return}} \approx \sigma_{\text{Return}}$:

$$\sigma_{\ln S/S_0} \approx \frac{1}{S_0 + \mu \cdot \Delta t} \cdot \sigma_S \approx \frac{1}{S_0} \cdot \sigma_{\Delta S} = \sigma_R$$

Volatilität der Gesamtrendite:

$$\boxed{\sigma_R^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial R_\Pi}{\partial R_i} \cdot \sigma_{ij} \cdot \frac{\partial R_\Pi}{\partial R_j} = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \cdot \sigma_{ij} \cdot \lambda_j = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \cdot \sigma_i \cdot \rho_{ij} \cdot \lambda_j \cdot \sigma_i}$$

Kovarianzmatrix: $\sigma_{ij} = \left\langle \left(R_i - \overline{R}_i\right) \cdot \left(R_j - \overline{R}_j\right) \right\rangle$

Korrelationsmatrix: $\rho_{ij} = \dfrac{\left\langle \left(R_i - \overline{R}_i\right) \cdot \left(R_j - \overline{R}_j\right) \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \left(R_i - \overline{R}_i\right)^2 \right\rangle} \cdot \sqrt{\left\langle \left(R_j - \overline{R}_j\right)^2 \right\rangle}}$

Rendite / Volatilität für zwei Aktien

Return: $R = \lambda_1 \cdot R_1 + \lambda_2 \cdot R_2$

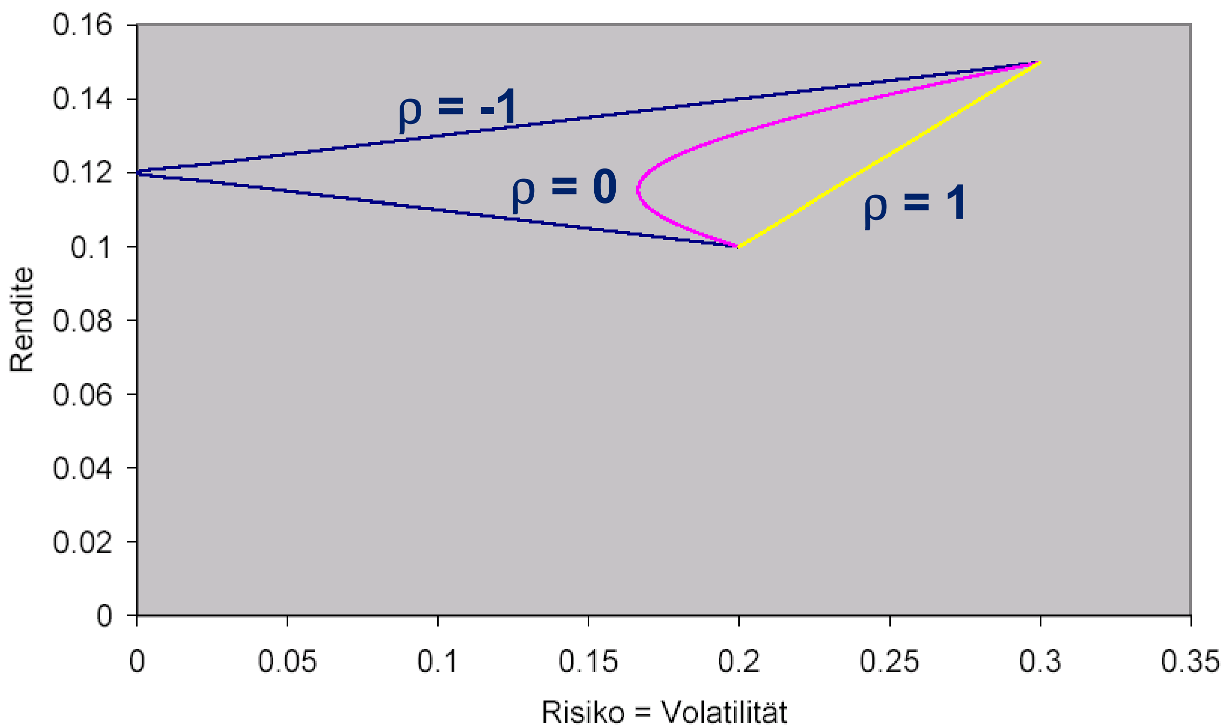
Volatilität der Gesamtrendite:

$$\sigma_R^2 = \sum_{i,j=1}^{2} \lambda_i \cdot \sigma_i \cdot \rho_{ij} \cdot \lambda_j \cdot \sigma_i = \lambda_1^2 \cdot \sigma_1^2 + 2 \cdot \lambda_1 \cdot \sigma_1 \cdot \lambda_2 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12} + \lambda_2^2 \cdot \sigma_2^2$$

100 % korreliert: $\sigma_{R,\rho=1}^2 = \left(\lambda_1 \cdot \sigma_1 + \lambda_2 \cdot \sigma_2\right)^2$

100 % antikorreliert: $\sigma_{R,\rho=-1}^2 = \left(\lambda_1 \cdot \sigma_1 - \lambda_2 \cdot \sigma_2\right)^2$

Rendite / Volatilität für zwei Aktien

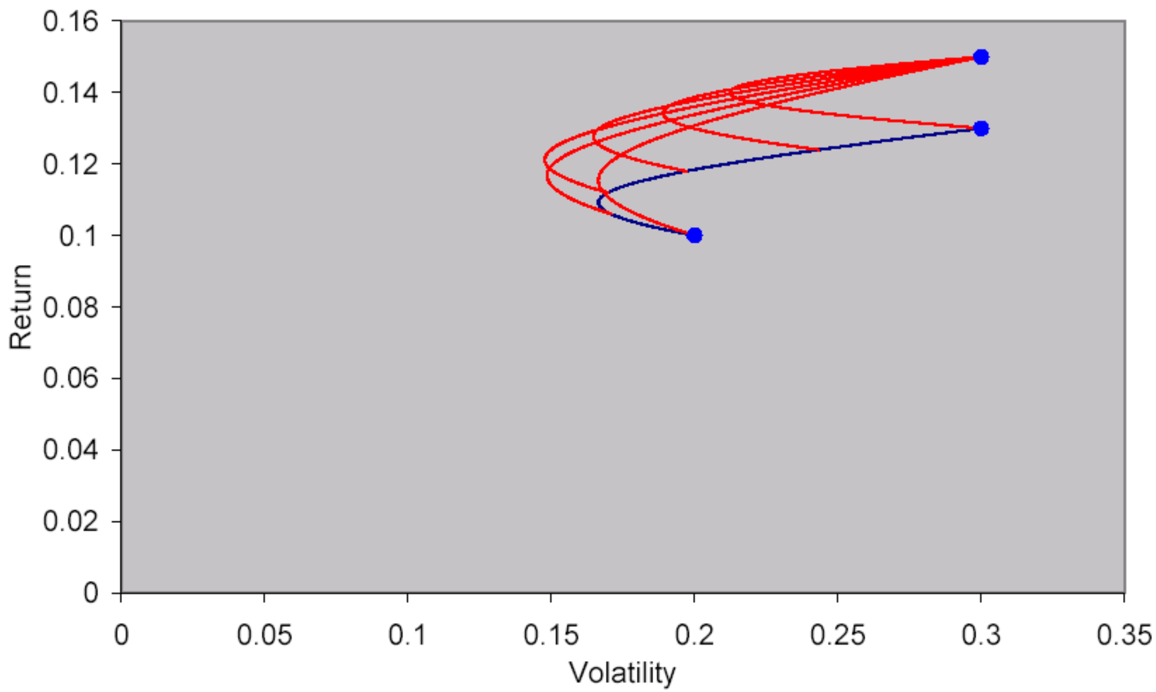


Bei 100 % Antikorrelation kann ein risikofreies Portfolio gebildet werden.

Rendite / Volatilität für drei Aktien

Drei unkorrelierte Aktien:

1. Kombiniere 2 Aktien wie eben gezeigt.
2. Kombiniere die 3. Aktie mit den möglichen Portfolien der ersten beiden Aktien.



Rendite / Volatilität für n Aktien

Beispiel mit 6 Aktien:

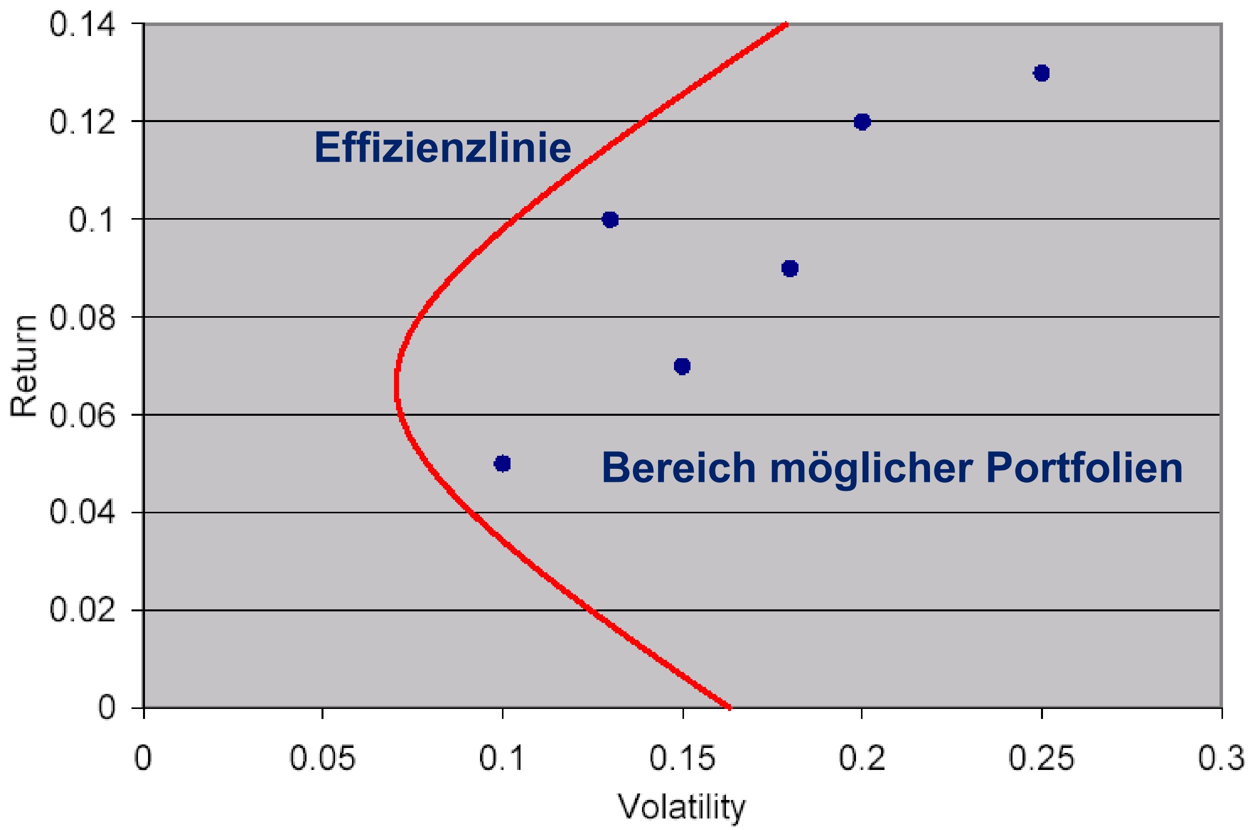
	1	2	3	4	5	6
Rendite	5 %	7 %	10 %	9 %	12 %	13 %
Volatilität	10 %	15 %	13 %	18 %	20 %	25 %

Korrelationsmatrix:

ρ_{ij}	1	2	3	4	5	6
1	1	0.5	-0.1	0.3	0.1	0.4
2	0.5	1	0	0.4	0.4	0.2
3	-0.1	0.4	1	0.3	0.2	0.1
4	0.3	0.4	0.3	1	0.3	0.3
5	0.1	0.4	0.2	0.3	1	0.7
6	0.4	0.2	0.1	0.3	0.7	1

Rendite / Volatilität für n Aktien

Minimiere Volatilität bei fester Rendite $\Rightarrow$ Effizienzlinie



$\lambda_i < 0$ erlaubt
$\Rightarrow$ Leerverkäufe

Ermittlung der Effizienzlinie

Bestimme λ_i durch Minimierung der Volatilität

$$\boxed{\sigma_R^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \cdot \sigma_{ij} \cdot \lambda_j = \vec{\lambda}^T \cdot \sigma_{ij} \cdot \vec{\lambda} = \min}$$

unter den Nebenbedingungen:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \vec{1} \cdot \vec{\lambda} \qquad R_\Pi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot R_i = \vec{\lambda} \cdot \vec{R}$$

Methode der Lagrange-Multiplikatoren:

$$\boxed{L = \vec{\lambda}^T \cdot \sigma_{ij} \cdot \vec{\lambda} + \alpha \cdot \left(R_\Pi - \vec{\lambda} \cdot \vec{R}\right) + \beta \cdot \left(1 - \vec{\lambda} \cdot \vec{1}\right) = \min}$$

gesucht: λ_i, α und β

$$\boxed{L = \vec{\lambda}^T \cdot \sigma_{ij} \cdot \vec{\lambda} + \alpha \cdot \left(R_\Pi - \vec{\lambda} \cdot \vec{R}\right) + \beta \cdot \left(1 - \vec{\lambda} \cdot \vec{1}\right) = \min}$$

Ableitung nach λ_i :

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \vec{\lambda}} = 2 \cdot \sigma_{ij} \cdot \vec{\lambda} - \alpha \cdot \vec{R} - \beta \cdot \vec{1} \qquad (1)$$

Ableitung nach α, β:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \alpha} = R_\Pi - \vec{\lambda} \cdot \vec{R} \qquad (2) \qquad\qquad 0 = \frac{\partial L}{\partial \beta} = 1 - \vec{\lambda} \cdot \vec{1} \qquad (3)$$

(1) $\Rightarrow$

$$\vec{\lambda} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij}^{-1} \cdot \left(\alpha \cdot \vec{R} + \beta \cdot \vec{1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_j \left(\alpha \cdot \sigma_{ij}^{-1} R_j + \beta \cdot \sigma_{ij}^{-1}\right)$$

(1,2) $\Rightarrow$

(1,3) $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} R_\Pi &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j} \left(\alpha \cdot R_i \cdot \sigma_{ij}^{-1} \cdot R_j + \beta \cdot R_i \cdot \sigma_{ij}^{-1}\right) = a \cdot \alpha + b \cdot \beta \\ 1 &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j} \left(\alpha \cdot \sigma_{ij}^{-1} \cdot R_j + \beta \cdot \sigma_{ij}^{-1}\right) = b \cdot \alpha + c \cdot \beta \end{aligned}}$$

$$\boxed{0 = 2 \cdot \sigma_{ij} \cdot \vec{\lambda} - \alpha \cdot \vec{\mathrm{R}} - \beta \cdot \vec{1} \qquad (1)}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\Pi \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2)}$$

(2) Auflösung nach α, β: $$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} R_\Pi \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a \cdot c - b^2} \cdot \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_\Pi \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) Volatilität: $$0 = 2 \cdot \vec{\lambda}^T \cdot \sigma_{ij} \cdot \vec{\lambda} - \alpha \cdot \vec{\lambda}^T \cdot \vec{\mathrm{R}} - \beta \cdot \vec{\lambda}^T \cdot \vec{1} = 2 \cdot \sigma_\Pi{}^2 - \alpha \cdot R_\Pi - \beta$$

$$\Rightarrow \qquad \sigma_\Pi^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\alpha \cdot R_\Pi + \beta\right)$$

Effizienzlinie $\Rightarrow$ $$\boxed{\sigma_\Pi = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \left(a \cdot c - b^2\right)}} \sqrt{c \cdot R_\Pi^2 - 2 \cdot b \cdot R_\Pi + a}}$$

Berücksichtigung von Anleihen

Anleihen haben

- feste Rendite (Zinssatz)
- kein Risiko (bei guten Schuldnern).

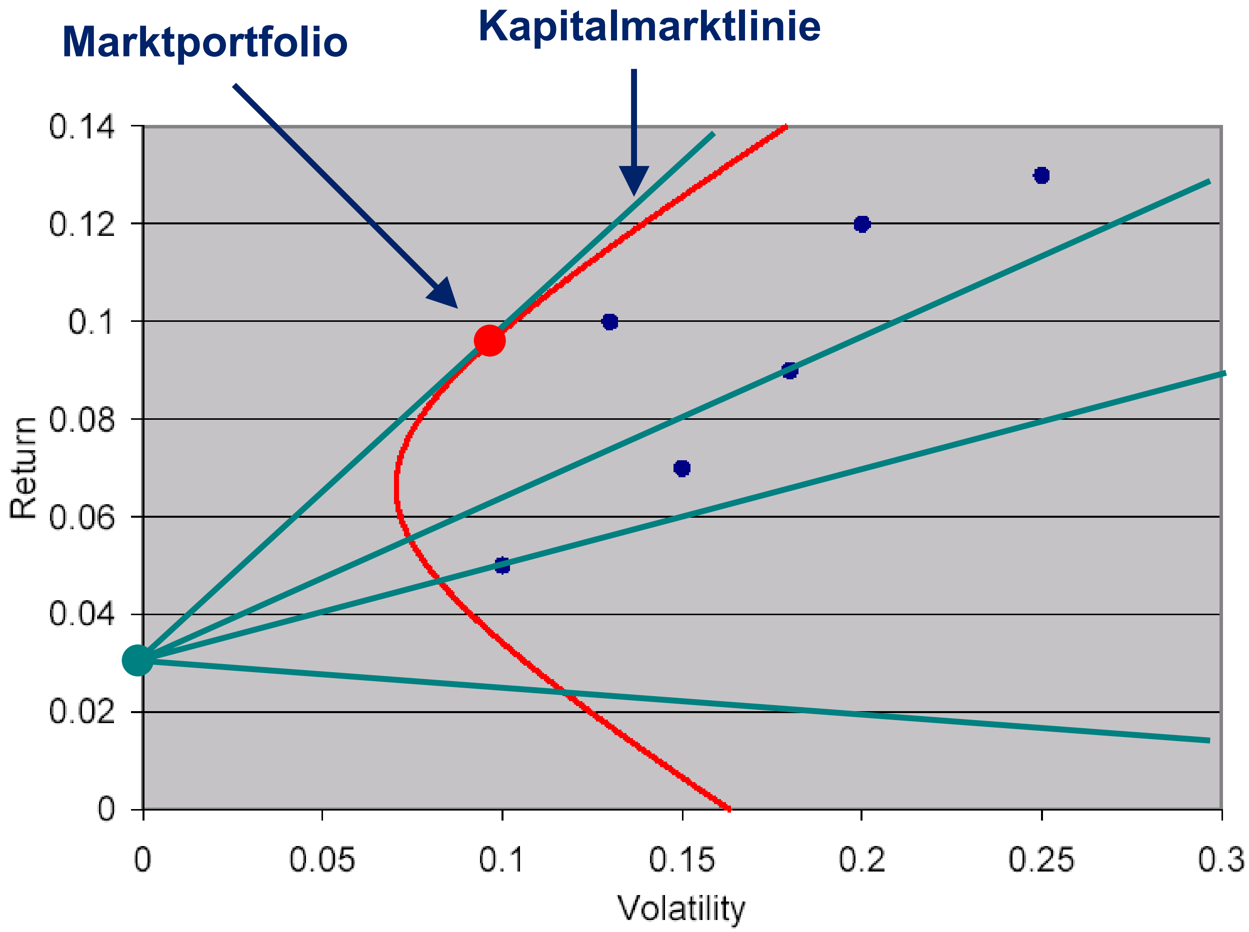
<u>Portfolio mit einer Aktie (R, σ) und einer Anleihe (R_0, σ_0):</u>

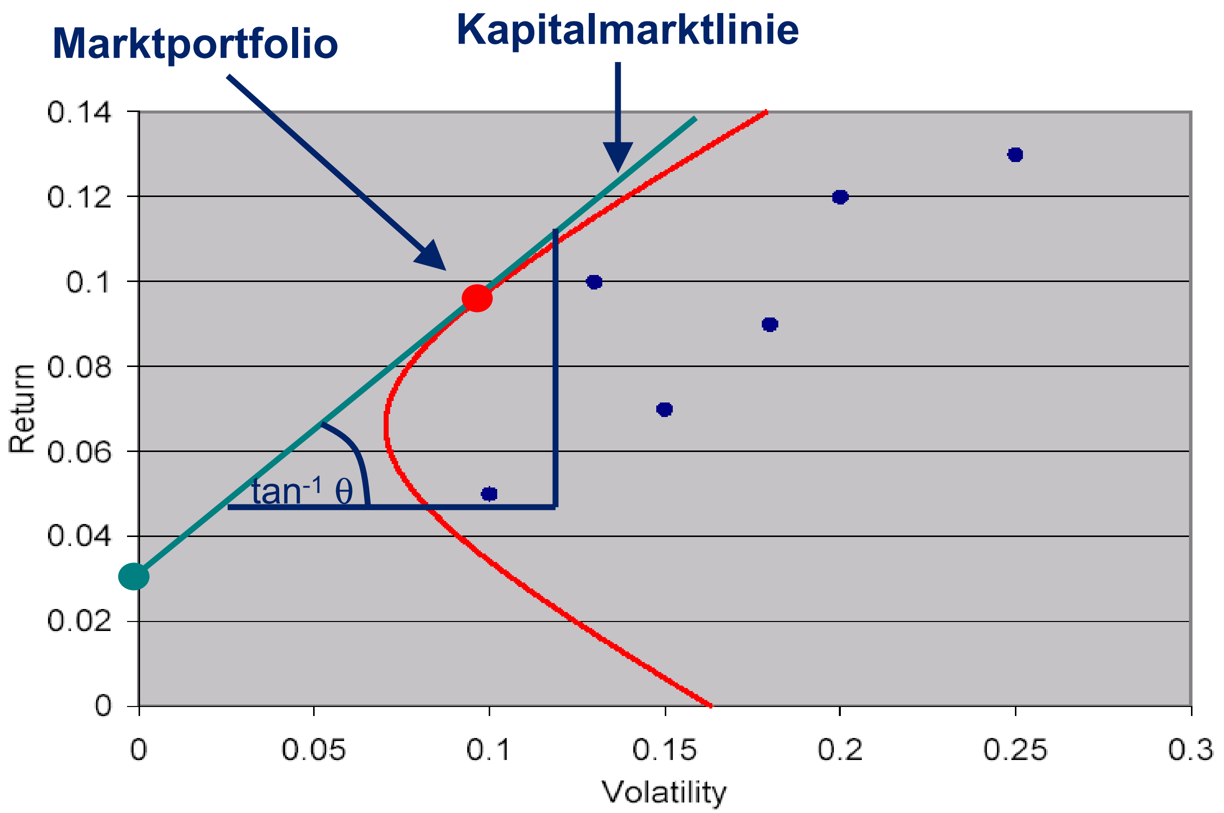
Rendite: $$R_\Pi = \lambda \cdot R + \lambda_0 \cdot R_0 = \lambda \cdot R + (1-\lambda) \cdot R_0$$

Volatilität: $$\sigma_\Pi = \sqrt{\lambda^2 \cdot \sigma^2 + \lambda_0^2 \cdot \sigma_0^2 + 2 \cdot \lambda \cdot \lambda_0 \cdot \rho \cdot \sigma \cdot \sigma_0} = \lambda \cdot \sigma$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R_\Pi = \frac{\sigma_\Pi}{\sigma} \cdot R + \left(1 - \frac{\sigma_\Pi}{\sigma}\right) \cdot R_0 = R_0 + \frac{R - R_0}{\sigma} \cdot \sigma_\Pi}$$

Berücksichtigung von Anleihen





Kapitalmarktlinie: Menge der optimalen Portfolien

Marktpreis des Risikos Θ: Maximales Verhältnis von (Rendite – Zinsrate) / Risiko

Bestimmung des Marktportfolios

$$R_\Pi = \vec{\lambda} \cdot \vec{R}$$

$$\sigma_\Pi = \sqrt{\vec{\lambda}^T \cdot \sigma_{ij} \cdot \vec{\lambda}}$$

Bestimme λ_i des Marktportfolios durch **Maximierung von**

$$\Theta = \frac{R_\Pi - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot R_0}{\sigma_\Pi} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot (R_i - R_0)}{\sqrt{\vec{\lambda}^T \cdot \sigma_{ij} \cdot \vec{\lambda}}}$$

Zunächst keine Einschränkung für $\Sigma\, \lambda_i$, da Θ unabhängig von der Normierung ist.

$$0 = \frac{\partial \Theta}{\partial \vec{\lambda}} = \frac{1}{\sigma_\Pi} \cdot \left(\vec{R} - R_0 \cdot \vec{1}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Theta}{\sigma_\Pi^2} \cdot 2 \cdot \sigma_{ij} \cdot \vec{\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{z} \equiv \frac{\Theta}{\sigma_\Pi} \cdot \vec{\lambda} = \sigma_{ij}^{-1} \cdot \left(\vec{R} - R_0 \cdot \vec{1}\right)$$

Nebenbedingung $\Sigma\, \lambda_i = 1$:

$$\sum_i z_i = \frac{\Theta}{\sigma_\Pi} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\lambda} = \frac{\vec{z}}{\sum_i z_i} \qquad \Rightarrow \qquad \Theta$$

Beispiel einer Portfolio-Optimierung

Beispiel mit 6 Assets:

	hist. Volatilität	hist. Beta	hist. Rendite	λ_i	KVG^{-1}	λ_i
Anleihe	0 %	-	4 %	-	-	-
DAX	36.4 %	-	6.1 %	-		
Allianz	53.7 %	1.31	0 %	-98 %	9.1 %	-33 %
BMW	37.6 %	0.78	13.0 %	90 %	10.1 %	74 %
Deutsche Bank	42.5 %	1.05	10.1 %	76 %	11.5 %	136 %
Schering	34.5 %	0.57	15.1 %	100 %	5.3 %	-34 %
Siemens	52.1 %	1.28	5.4 %	-29 %	8.0 %	-70 %
Thyssen Krupp	36.9 %	0.66	1.9 %	-39 %	8.2 %	26 %

Quelle: www.comdirect.de

Volatilitäten, Beta-Faktoren aus der Historie des letzen Jahres.

Rendite = historische Rendite der letzten 10 Jahre

KGV^{-1} = Mittelwerte der Gewinn-Kurs-Verhältnisse für 2002, 2003

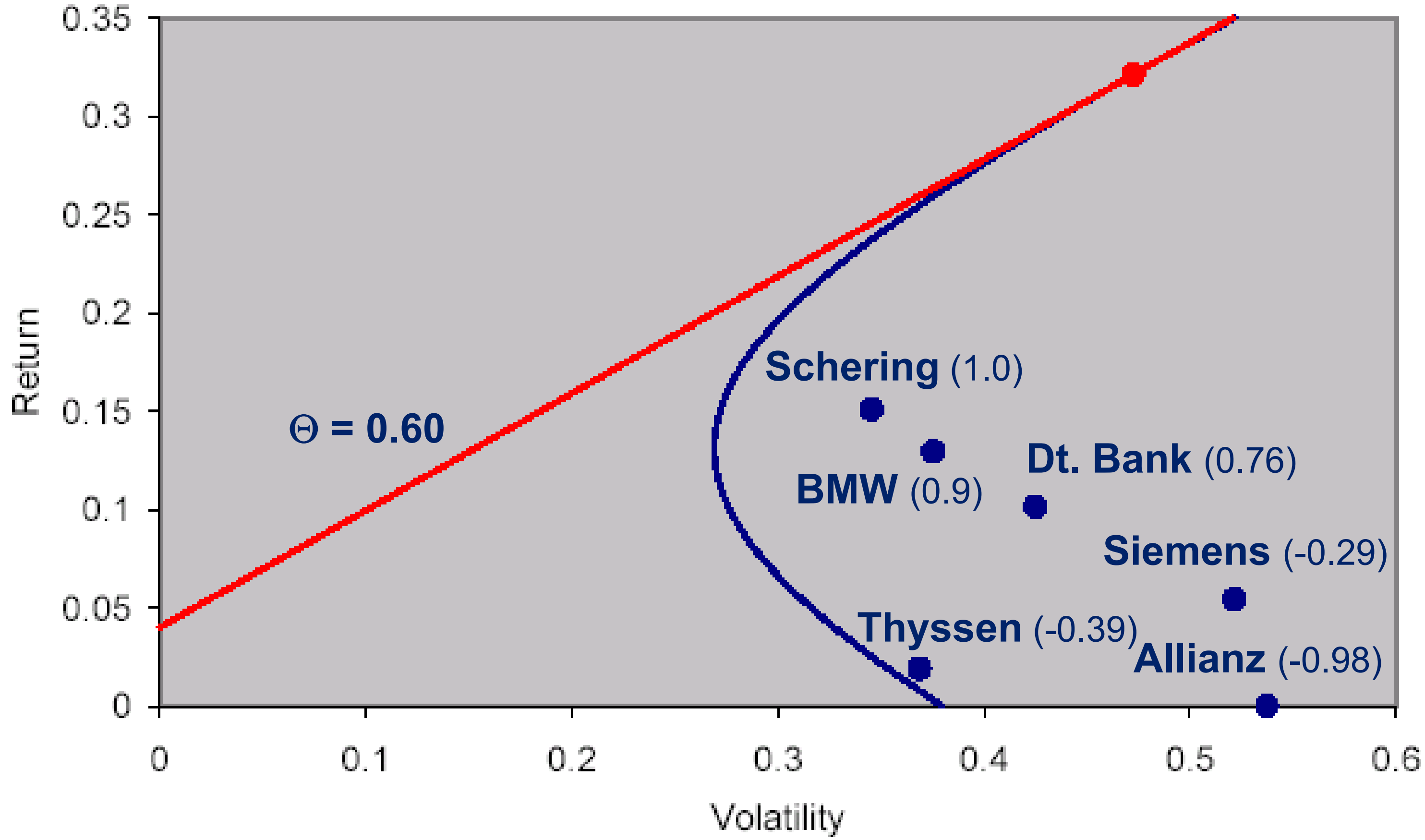
Werte vom 7.10.2002

Capital Asset Pricing Model: $\boxed{R_i = \alpha_i + \beta_i \cdot R_{Index} + \varepsilon_i}$

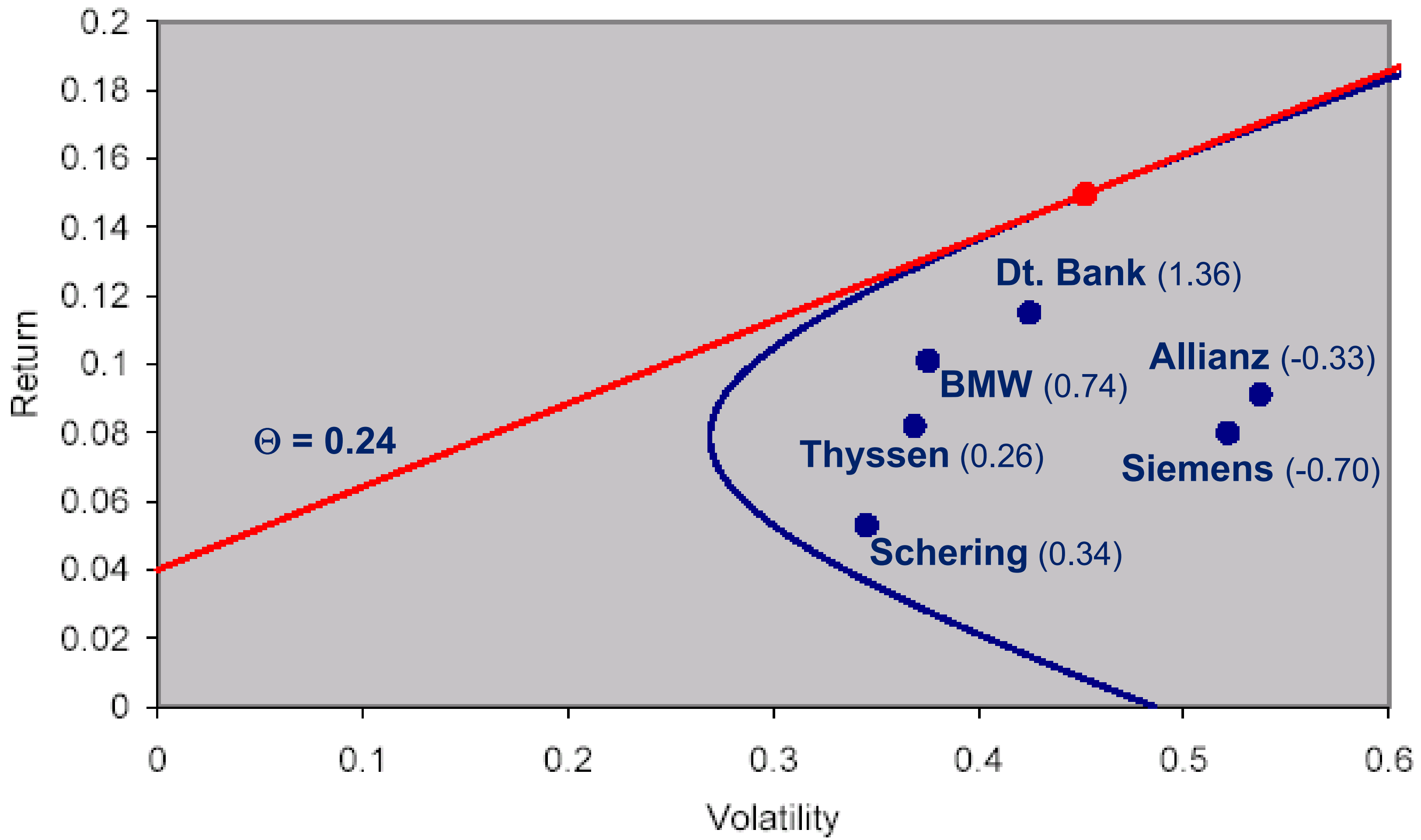
α: spezifische Rendite
ε: spezifische Schwankung

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sigma_{i,j\neq i} = \beta_i \cdot \beta_j \cdot \sigma^2_{Index}}$$

Portfolio-Optimierung mit historischen Renditen



Portfolio-Optimierung mit Kurs-Gewinn-Verhältnis



Zusammenfassung:

Moderne Portfolio-Theorie

Annahmen

- Preisänderungen sind normalverteilt und stationär.
- Renditen, Volatilitäten und Korrelationen sind bekannt.

Portfolio-Optimierung

- Für vorgegebene Rendite oder vorgegebenes Risiko gibt es ein optimales Portfolio.
- Das Risiko ändert sich linear mit der Volatilität
  $\Rightarrow$ Marktpreis des Risikos

Anwendbarkeit ist beschränkt,
da die Vorhersage der zukünftigen Renditen schwierig ist.

d-fine GmbH

Mergenthaleralle 55

65760 Eschborn

Germany

T: +49/(0)6196/7697-0

F: +49/(0)6196/7697-19-00

www.d-fine.de