Zeitreihenanalyse von Finanzdaten

Dr. Thorsten Oest

Oktober 2002

Womit beschäftigt sich Econophysics?

Analyse von Finanzdaten

- Preisänderungen
- Volatilitäten und Korrelationen
- Krisenanalyse

Modelle zur Beschreibung von Finanzdaten

- Stable Distributions, Agentenmodelle, (Turbulenzen),....

Behandlung von Finanzprodukten

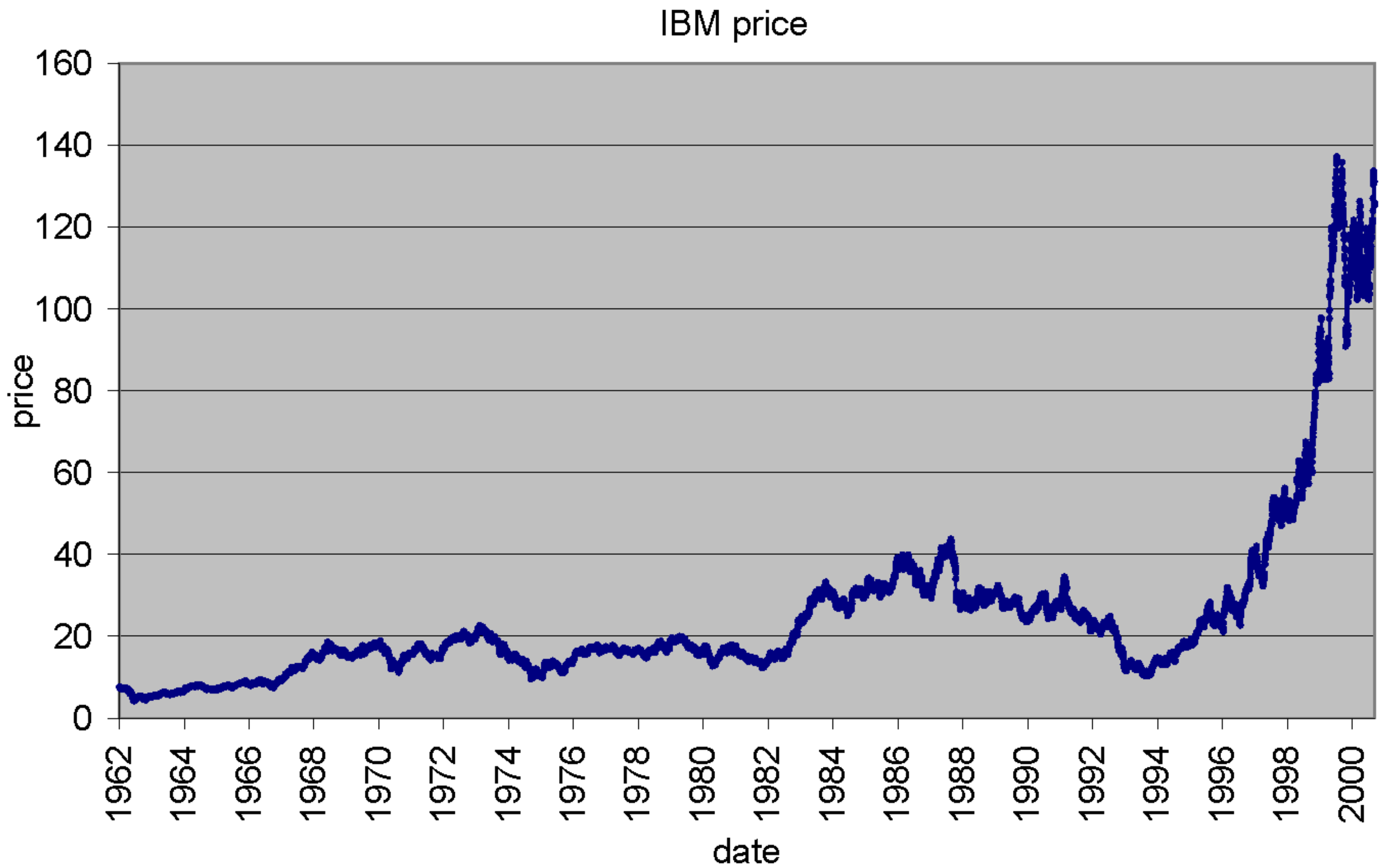
- Bewertung von Derivaten
- Portfoliooptimierung
- Risikomanagement

(siehe J.D. Farmer: „Physicists attempt to Scale the Ivory Towers of Finance“,)

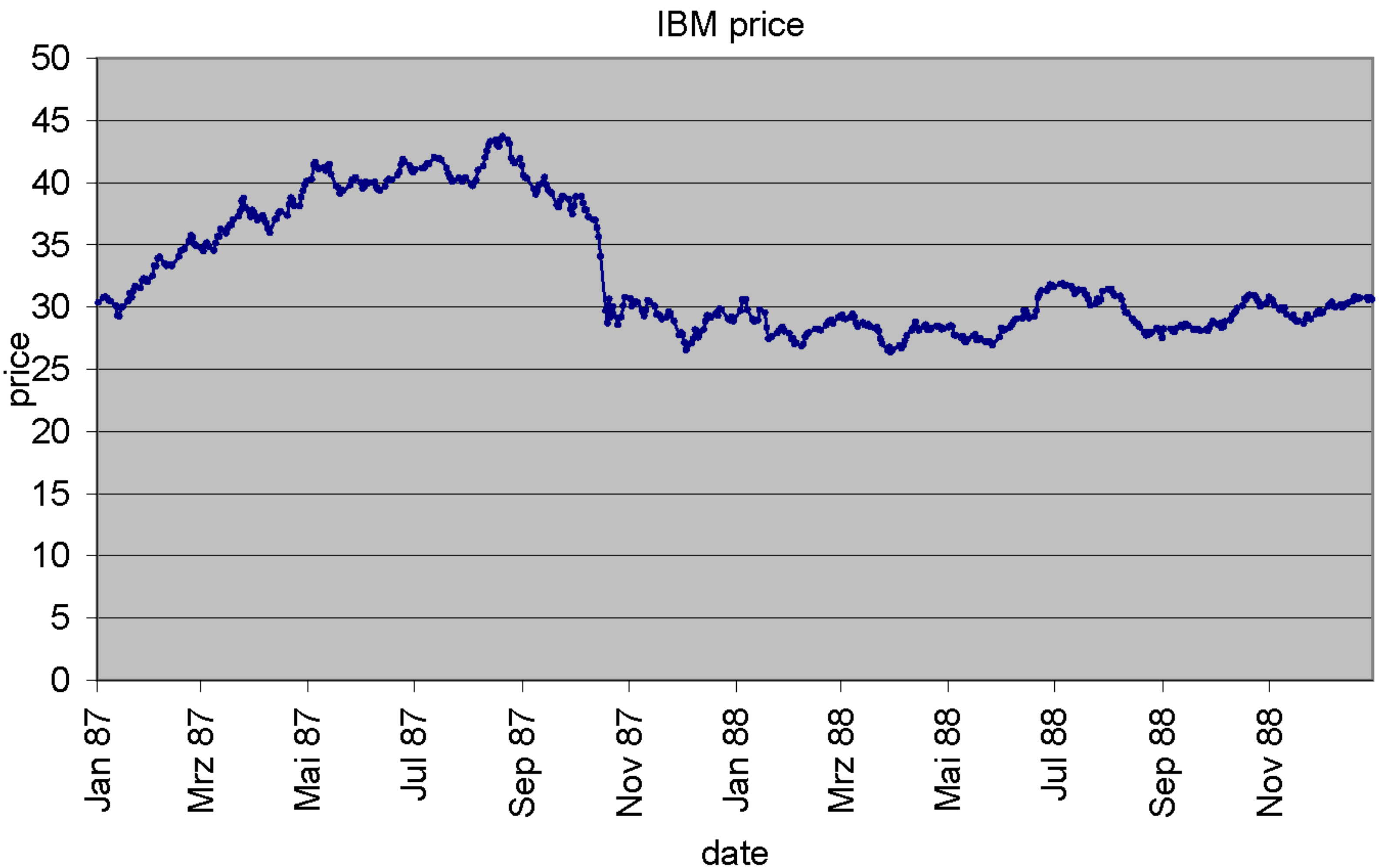
Übersicht über den Vortrag

1. Einleitung
2. Beispiel zur Preisermittlung
3. Definition des Begriffs „Zeitreihe“
4. Kursmodelle
   - Vergleichsmodell: i.i.d. Zufallsvariable
5. Ergebnisse von Zeitreihenanalysen
   - Wahl der Variablen
   - PDF für Returns ($\Rightarrow$ Optionsbewertung)
   - Sind Volatilitäten konstant ($\Rightarrow$ Optionsbewertung)
   - Korrelationen zwischen Kursen ($\Rightarrow$ Portfoliooptimierung)

Ziel der Finanzdatenanlyse



Aktiencrash Oktober 1987



Ziel der Finanzdatenanlysen

Modell zur Beschreibung von Kursen, Zinssätzen,...

- Vorhersage von kurzfristigen Kursänderungen. Untersuchung langfristiger Änderungen ist schwierig wegen geringer Statistik.
- Derivatbewertung: Kenntnis des stochastischen Verhaltens der Kurse.
- Portfoliooptimierung: Kenntnis der Korrelation zwischen verschiedenen Produkten.
- Vorhersage von Krisen. Kann man eine instabile Marktlage erkennen?

Die Datenanalyse basiert hier ausschließlich auf der Analyse von Kurszeitreihen.

Spiel: Analogon zur Preisbildung

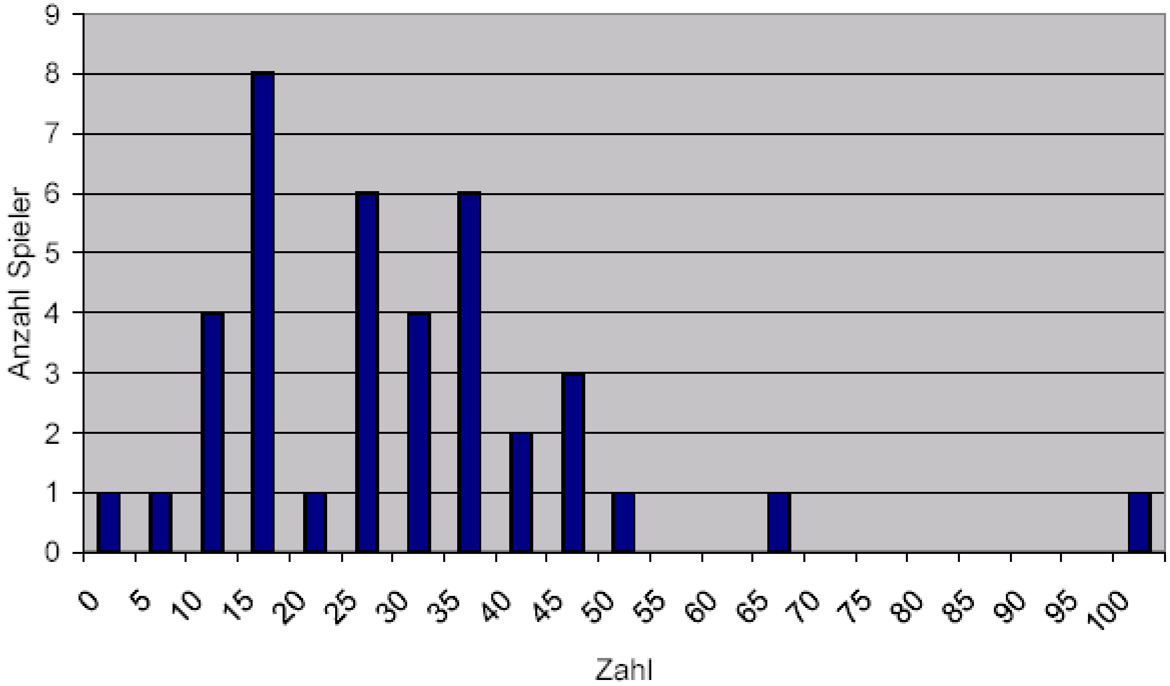
1. Jeder Teilnehmer des Spiels wählt eine reelle Zahl zwischen 0 und 100 (einschließlich 0 und 100)

2. Es wird der Mittelwert x gebildet
3. Gewonnen hat, wer am nächsten am Wert 2/3 • x liegt

R Selten, R. Nagel, *Das Zahlenwahlspiel*, Spektrum der Wissenschaft, Digest 1/98.

Spiel: Analogon zur Preisbildung

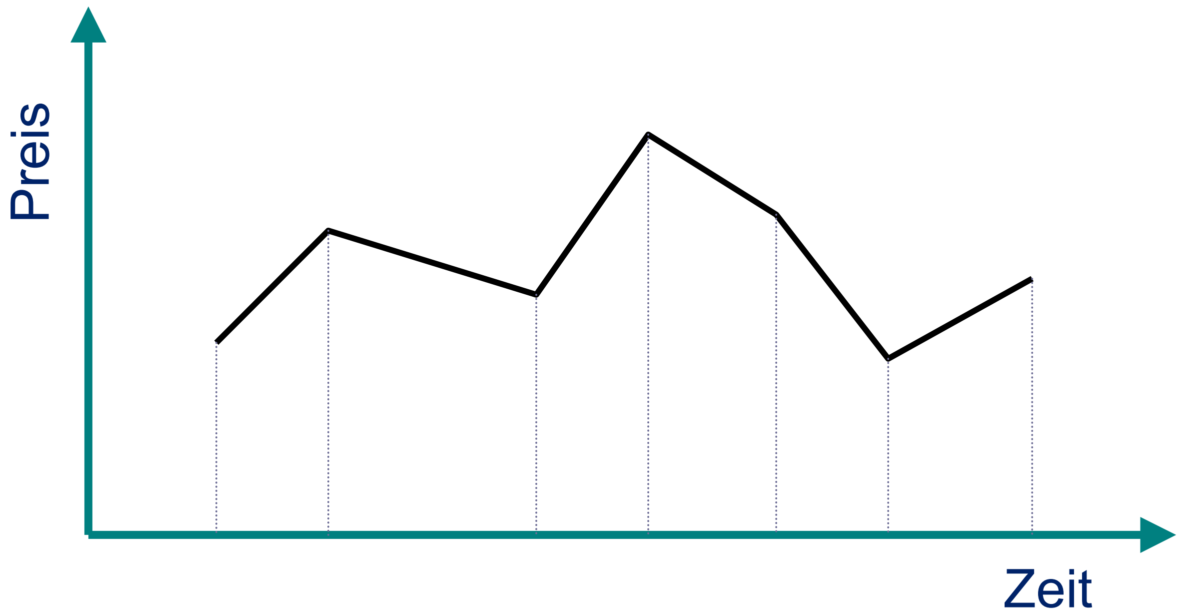
Ergebnis eines Spiels mit 37 Teilnehmern:



2/3 des Mittelwerts = 17.1 (typischer Ergebnis)

Definition einer Zeitreihe

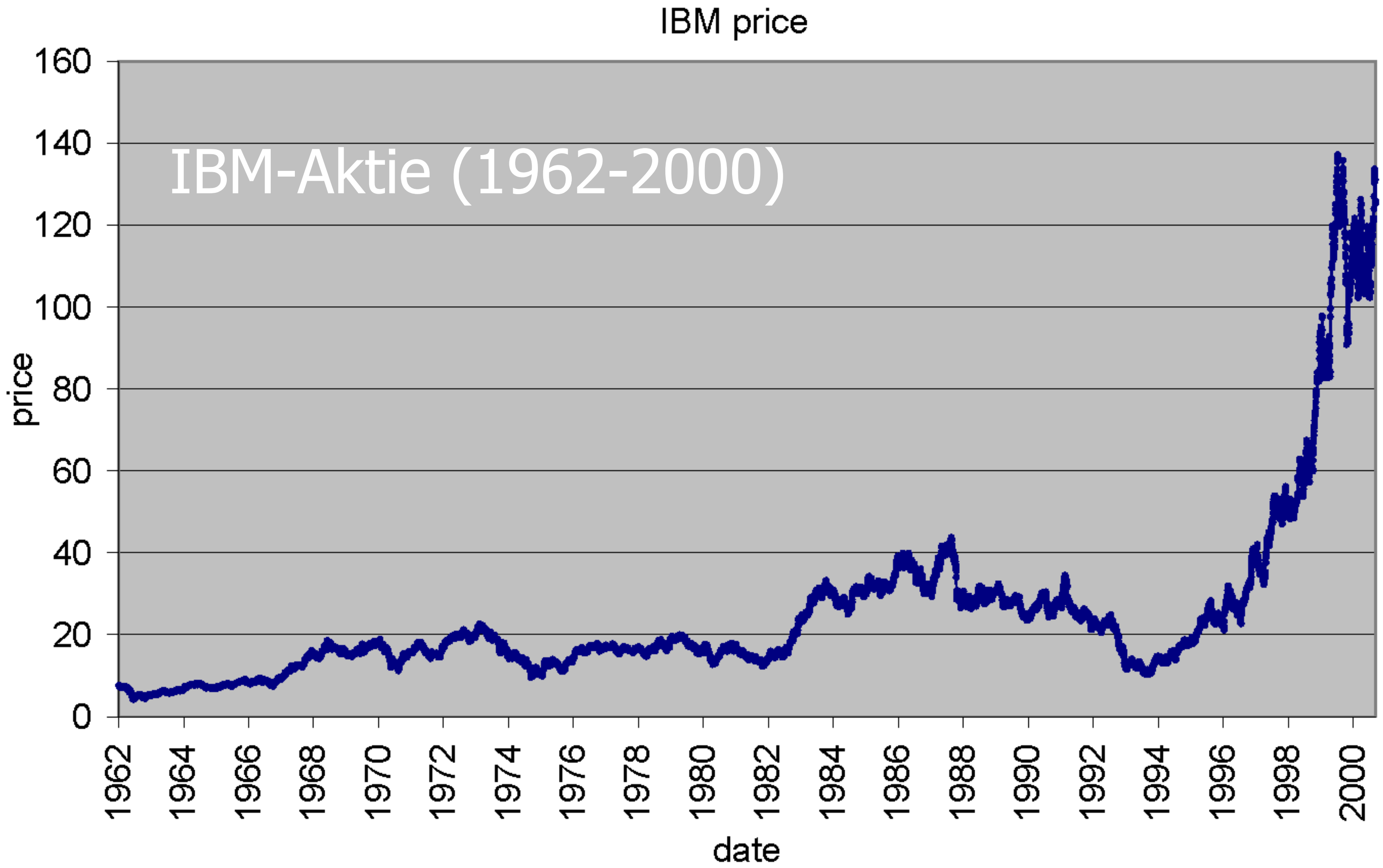
Zeit	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6 ......
Preis	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6 ......



Es gibt nur eine Zeitreihe für jedes Finanzprodukt!

$\Rightarrow$ Statistik ist eingeschränkt.

Beispiel für eine Zeitreihe



Quellen

Finanzdaten

- Yahoo (finance.yahoo.com)
  Kann direkt mit Excel importiert werden
- Banken (www.comdirect.de)
- Econophysics Webseite (www.unifr.ch/econophysics/)

Preprints

- Econophysics Webseite (www.unifr.ch/econophysics/)

Diese Vorlesung:

- d-fine (www.d-fine.de)

Modelle für Preisprozesse

a) Wahl der Variablen
- Zeitvariable
- Preisvariable

b) Modelle zum Beschreiben von Kursveränderungen.
- – i.i.d. Prozess (indepent identically distributed) in diskreter Zeit
  - stabile Prozesse
    - – Random Walk (Gaußverteilt)
    - – Levy-Prozess (Varianz ist unendlich)
  - Student‘s t-Verteilung, Truncated Levy-Flight
- – Volatility Clustering, GARCH
- – Jump-diffusion
- – Mean Reversion
- – Agentenmodelle
- ⇒ i.i.d. Prozess als Hypothese

Es gibt bisher kein allgemein akzeptiertes Modell!

Wahl der Variablen

Zeitvariable

- Ereignisse, die den Markt beeinflussen, können zu jeder Zeit geschehen.
- Mögliche Zeitskalen
  - **a)** **Physikalische Zeit,** d.h. 24 h pro Tag, 7 Tage pro Woche
    - 24 h pro Tag gerechtfertigt, wenn Produkt in Europa, Amerika und Asien gehandelt wird.
    - An Wochenenden gibt es keine Kurse.
  - b) **Handelzeit**, d.h. Börsenöffnungszeiten ohne Wochenende
    - Problem: Ereignisse am Wochenende beeinflussen den Preis am Montag morgen.

      für Aktien (siehe Hull): $\sigma(Wochenendtag) \approx 0.3 \cdot \sigma(Wochentag)$

      ähnlich für Agrarprodukte $\Rightarrow$ Handel verursacht Volatilität
  - c) **"Transaktion"-Zeit** (Zahl der Transaktionen)

$\Rightarrow$ Handelszeit wird gewöhnlich gewählt (für Zeitreihenanalysen, Optionsbewertung,...).

Wahl der Variablen

Preisvariable

Es gibt zwei relevante Skalen für Preise:

- Einheit des Preises = Währung (ist selbst stochastisch)
- Einheit des Wertpapiers = 1/x Anteile an der Firma

Mögliche Preisvariablen:

a) Differenz von Kursen

$$\boxed{\Delta S_t = S_t - S_{t-1}}$$

⇒ skalenabhängig

⇒ Korrelationen in der Zeitreihe (Kendall[1] 1953)

b) Relative Kursänderungen, Rendite (Return)

$$\boxed{R_t = \Delta S_t / S_{t-1}}$$

⇒ erfordert p(R<0) = 0, da keine negativen Kurse (mit Ausnahmen, z.B. r(JPY))

c) Logarithmus des Quotienten (log Return [2])

$$\boxed{Z_t = \ln(S_t / S_{t-1})}$$

⇒ bei kleinen Preisänderungen ist $R_t \approx Z_t$

⇒ falls p(∞) = 0, keine negativen Kurse

⇒ Variable ist additiv $Z_{t,t-2} = Z_{t,t-1} + Z_{t-1,t-2}$

1 Kendall, *The Analysis of Economic Time-Series I,* (1964). 85-99
2 Osborne, *Random Character of Stock Market Prices* (1964) 100-128.

Begründung für i.i.d. Prozess

a) Annahme eines stationären Prozesses

- Invariant gegen Verschiebung des Zeitnullpunktes
- $\Rightarrow$ identically probability distributions

b) Hypothese der Markeffizienz

- Jede neue Information schlägt sich unmittelbar in neuen Preisen nieder.
- Bei einer Zeitreihe .....S_{t-4}, S_{t-3}, S_{t-2}, S_{t-1}, S_t, S_{t+1}, hängt S_{t+1} nur von S_t aber nicht von .....S_{t-4}, S_{t-3}, S_{t-2}, S_{t-1} ab.
- $\Rightarrow$ independent probability distributions

Beide Annahmen müssen in der Zeitreihenanalyse überprüft werden.

... einige Begriffe

gegeben:

- Preismodell mit Wahrscheinlichkeitsdichte p(x)
- x kann ΔS, R oder Z sein

Begriffe:

- Momente $m_n = \langle x^n \rangle$
- Drift (auf ein Jahr normiert) $\mu = \langle x \rangle$
- Volatilität (auf ein Jahr normiert) $\sigma = \sqrt{\langle (x-\mu)^2 \rangle}$
- Autokovarianz

$$
\begin{aligned}
C(t_1, t_2) &= \langle [x(t_1) - \mu(t_1)] \cdot [x(t_2) - \mu(t_2)] \rangle \\
&= \langle x_1 \cdot x_2 \rangle - \langle x_1 \rangle \cdot \mu_1 - \langle x_2 \rangle \cdot \mu_2 + \mu_1 \cdot \mu_2 \\
&= \langle x_1 \cdot x_2 \rangle - \mu^2
\end{aligned}
$$

i.i.d. Prozesse

Gegebene Zeitreihe:

- ...., x_{t-4}, x_{t-3}, x_{t-2}, x_{t-1}, x_t
- x beschreibt eine Preisänderung

a) i.i.d. (Independence)

- $E[x_t | x_{t-1}, x_{t-2}, x_{t-3,...}] = E[x_t]$
- Der Erwartungswert einer Preisänderung hängt nicht von der Vergangenheit ab (effizienter Markt).
- Die Preisänderung wird durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x_t,t)$ beschrieben.

b) i.i.d. (identische Verteilungen)

- $E[x_t]= E[x]$
- Die Preisänderung wird durch eine **Wahrscheinlichkeitsdichte p(x)** beschrieben.
- z.B. Random Walk: $p(x = \ln S_2 / S_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \Delta t} \cdot \sigma} e^{-[x-(\mu-0.5\sigma^2)\cdot\Delta t]^2 / [2\sigma^2 \Delta t]}$

Eigenschaften von i.i.d. Prozessen

Autokovarianz ist Null

$$C(t_1,t_2) = \langle x_1 \cdot x_2 \rangle - \mu^2$$
$$= \langle x_1 \rangle \cdot \langle x_2 \rangle - \mu^2 = \mu^2 - \mu^2 = 0$$

→

Additive Prozesse

additiv: x(t, t+2Δt) = x(t, t+Δt) + x(t +Δt, t+2Δt)

log-Return ist additiv: $\ln(S_t / S_{t-2}) = \ln(S_t / S_{t-1}) + \ln(S_{t-1} / S_{t-2})$

a) Skalierung der Volatilität (falls existent) $\sigma_n^{\ 2} = n \cdot \sigma^2$

$$\sigma_n^{\ 2} = \left\langle (X_n - \mu_n)^2 \right\rangle = \left\langle \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) \right]^2 \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left\langle x_i \cdot x_j - \mu^2 \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \cdot \sigma^2 = n \cdot \sigma^2$$

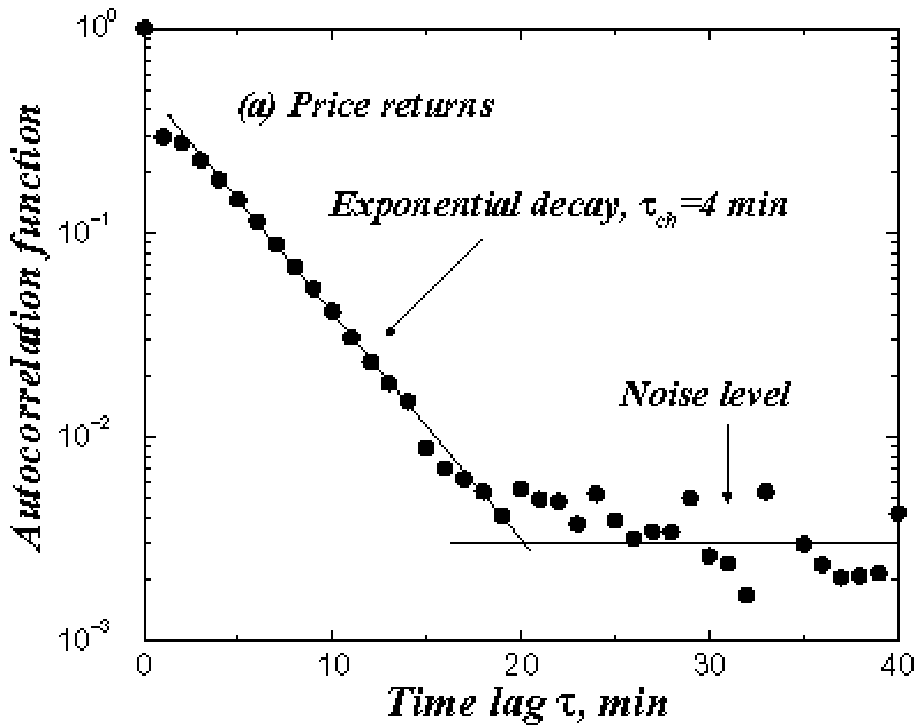
→

b) Verhalten bei großen Zeitintervallen
- Stabile Funktionen
- **Konvergenzverhalten**

Autokovarianz

S&P 500 Autocorrelation für log-Returns mit Δt = 10 min

– Korrelation verschwindet für Zeiten > 20 min
– exponentieller Abfall mit Zerfallszeit 4 min



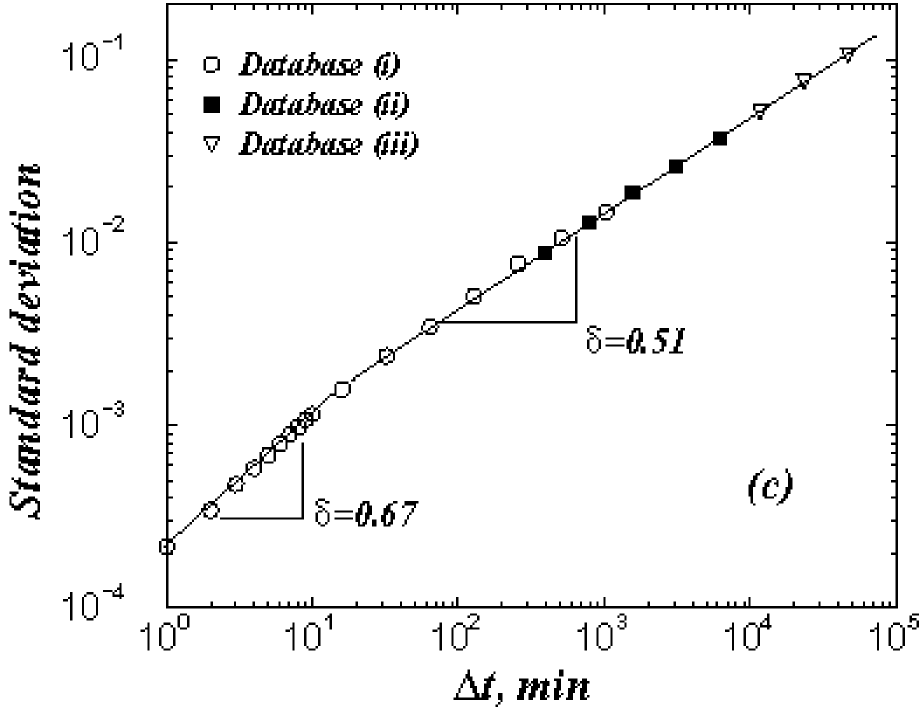
- Ähnlich für Returns
- Korrelationen zu gering für Arbitrage (Transaktionskosten)

Gopikrishnan et al., cond-mat/9905305 (1999).

Skalierung der Volatilität

Existiert die Varianz & i.i.d. Prozess

$$\sigma(\Delta t) = \sigma_0 \cdot \sqrt{\Delta t} \Rightarrow \ln \sigma(\Delta t) = \ln \sigma_0 + \frac{1}{2} \ln \Delta t$$



Für Δt > 20 min skaliert die Volatilität ungefähr mit $\sqrt{\Delta t}$ ($\delta \approx 0.51$-0.57)

Gopikrishnan et al., cond-mat/9905305 (1999).

Konvergenzverhalten

unabhängige Zufallszahlen mit endlicher Varianz

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \sigma_n{}^2 = n \cdot \sigma^2$$

Zentraler Grenzwertsatz

Für n $\rightarrow \infty$ ist die Variable

$$\tilde{X}_n = \frac{X_n}{\sqrt{n} \cdot \sigma}$$

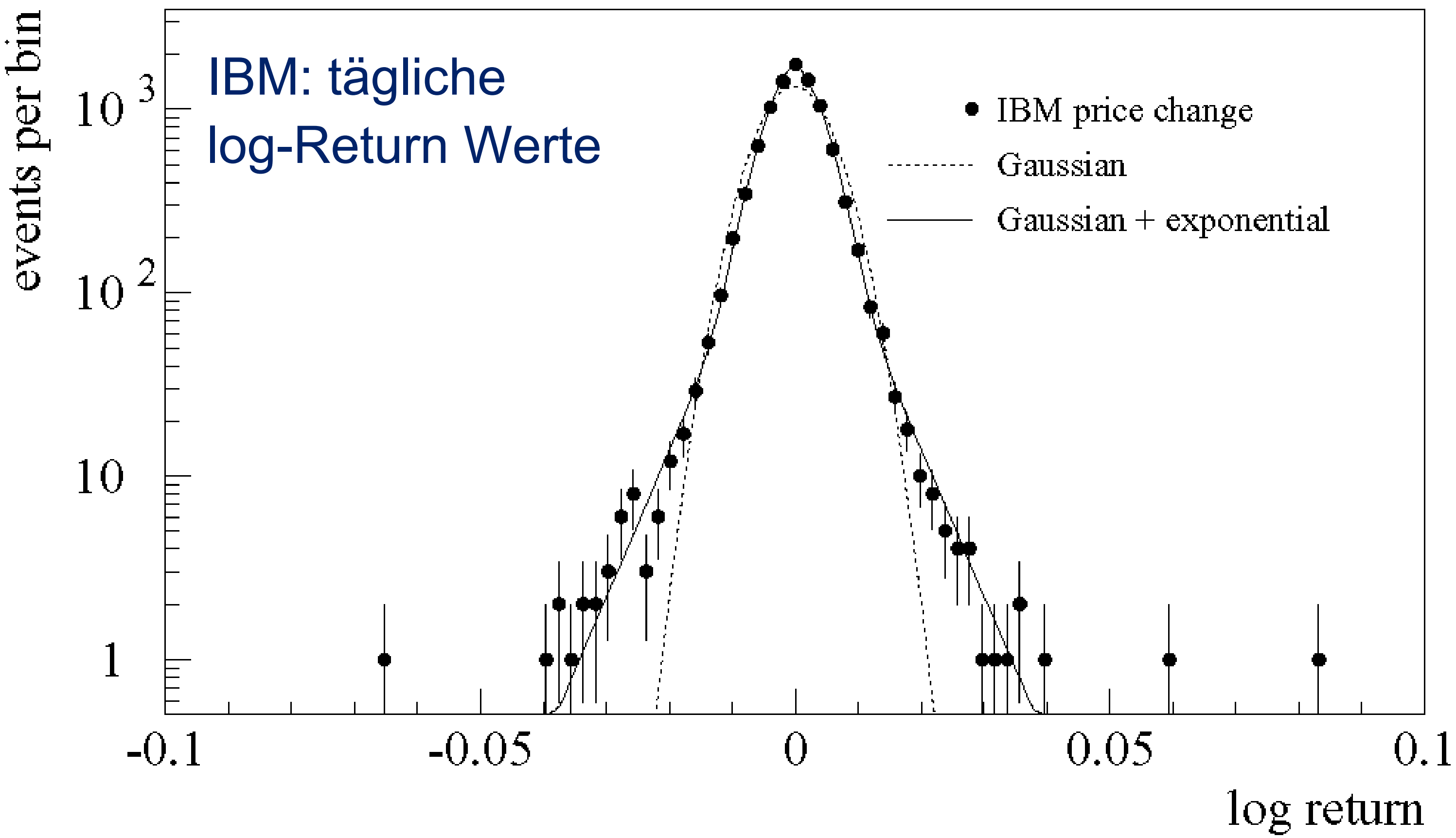
normalverteilt mit Varianz 1:

$$p(\tilde{X}_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\tilde{X}_n/2}$$

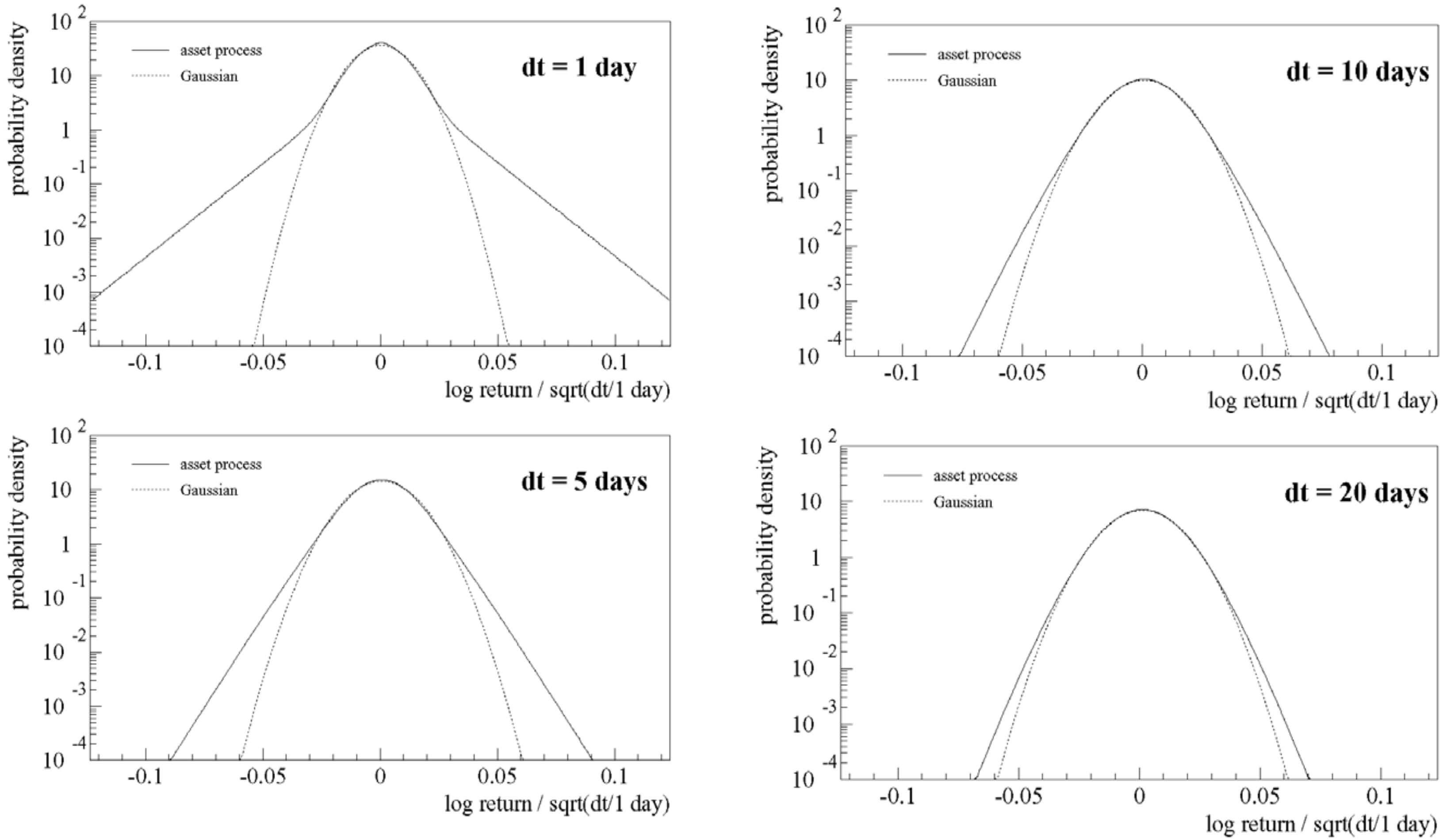
$\rightarrow$

Was ist, wenn die Varianz divergiert?

Beispiel: Konvergenz zur Normalverteilung



Beispiel: Konvergenz zur Normalverteilung



Stabile Funktionen

- Eine stabile Funktion behält die Form bei Selbstfaltung:

$$p_n(X_n) = \frac{1}{a_n} \cdot p(a_n \cdot x)$$

- Die Normalverteilung ist stabil:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-x^2/2\sigma^2} \xrightarrow{Fourier-Transf.} \varphi(q) = e^{-\sigma^2 q^2/2}$$

$$\downarrow$$

$$p_2(X_2) = p(x) \otimes p(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \sigma\right)} \cdot e^{-X_2^2/2\left(\sqrt{2}\cdot\sigma\right)^2} \xleftarrow{inv. Fourier-Transf.} \varphi_2(q_2) = \varphi^2(q) = e^{-\sigma^2 q^2}$$

Mantegna, Stanley: *An Introduction to Econophysics (2000)*

Lévy-Funktionen

Lévy-Funktionen bilden die Klasse aller stabilen Funktionen

– Definiert über die charakteristische Funktion

$$\ln\varphi(x) = \begin{cases} i\mu q - \gamma |q|^{\alpha}\left[1 - i\beta \frac{q}{|q|}\tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right] & \text{für } \alpha \neq 1 \\ i\mu q - \gamma |q| \cdot \left[1 + i\beta \frac{q}{|q|}\frac{2}{\pi}\ln|q|\right] & \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$$

mit $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq 1$, $\gamma \geq 0$

Mantegna, Stanley: *An Introduction to Econophysics (2000)*

Lévy-Funktionen

Eigenschaften der Lévy-Funktionen

- Varianz nicht definiert für $\alpha \neq 2$ (keine charakteristische Skala)
- $\alpha = 2$: Gaußverteilung, $\alpha = 1$ und $\beta = 0$ Lorentz-Verteilung
- Potenzverteilung für $|x| \to \infty$:

$$p_L(|x|) \xrightarrow{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|^{1+\alpha}}$$

- Selbstähnlichkeit

$$p\left(\widetilde{X}_n\right) \cdot n^{1/\alpha} = p(x) \qquad \widetilde{X}_n = \frac{X_n}{n^{1/\alpha}}$$

Mantegna, Stanley: *An Introduction to Econophysics (2000)*

Konvergenz

Eine Wahrscheinlichkeitsdichte p(x) konvergiert genau dann gegen die Lévy-Funktionen L_α mit $0 < \alpha < 2$, wenn

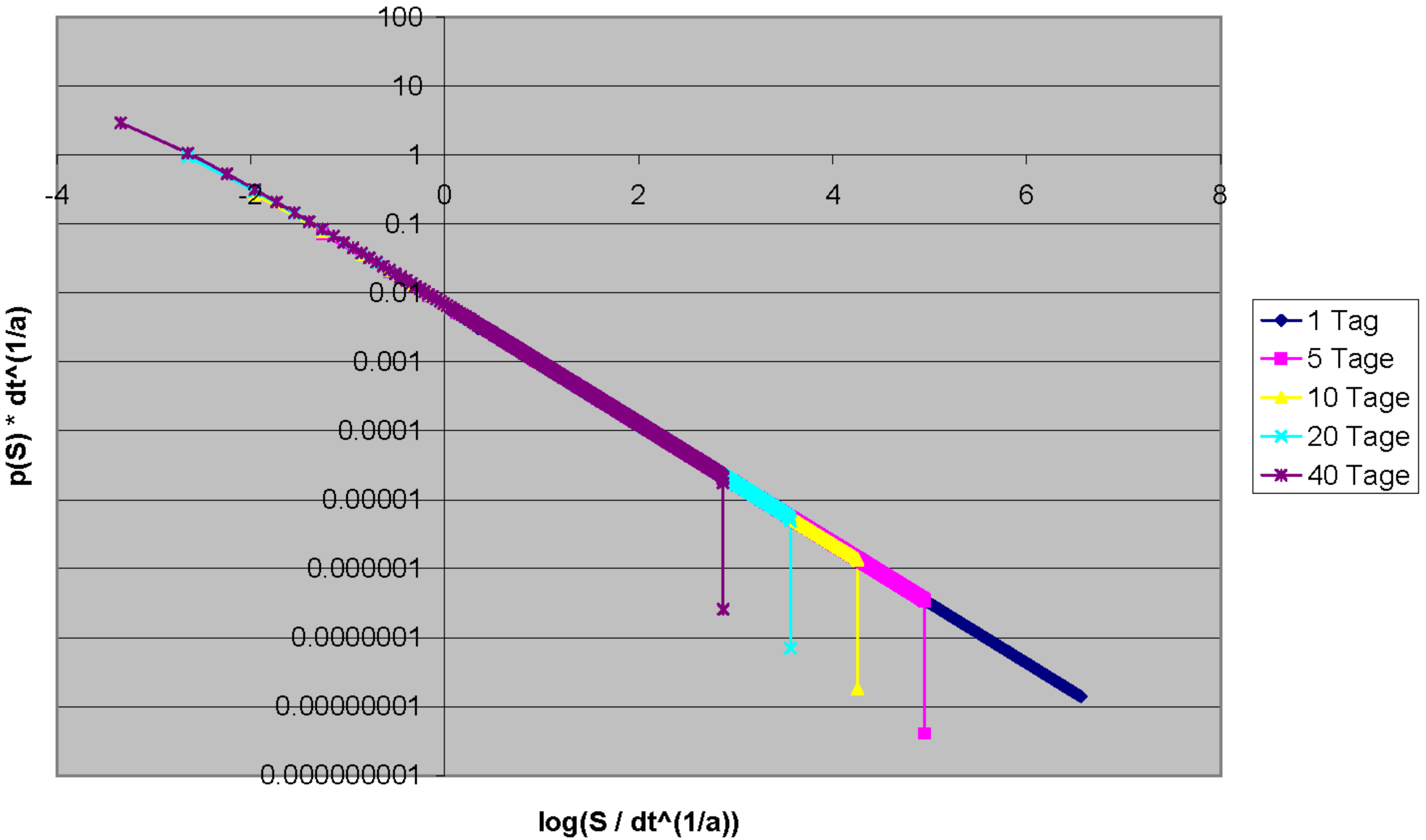
$$p(x) \propto \frac{c_\pm}{|x|^{1+\alpha}} \qquad \text{für } x \to \pm\infty$$

- Für L_2 (Gaußverteilung) gilt der „normale“ Grenzwertsatz.

Paul, Baschnagel *Stochastic Processes From Physics to Finance (1999)*

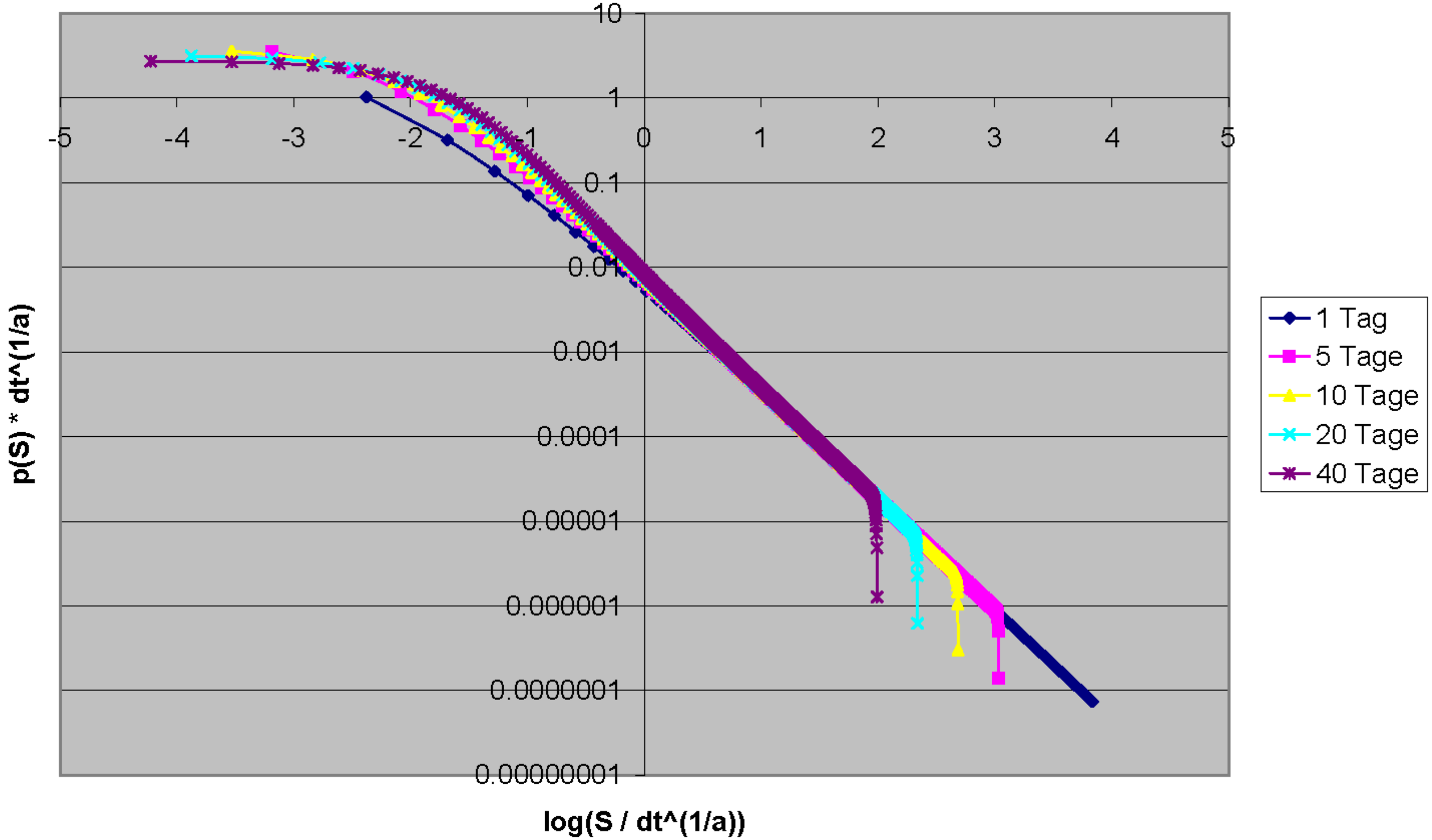
$\alpha = 1$

$$p(S) \propto \frac{1}{(|S| + 0.1)^{\alpha+1}}$$



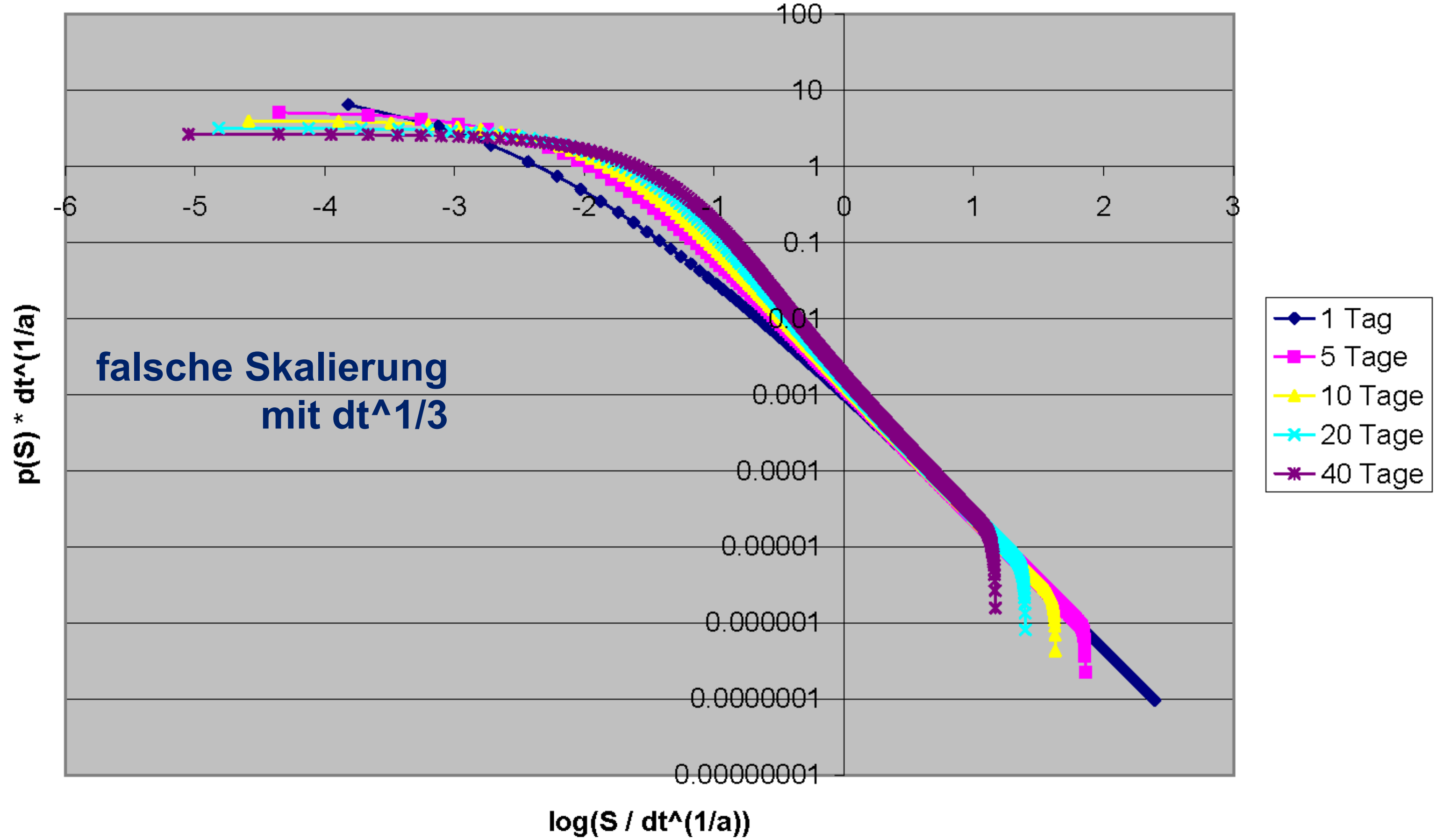
$\alpha = 2$

$$p(S) \propto \frac{1}{(|S| + 0.1)^{\alpha+1}}$$



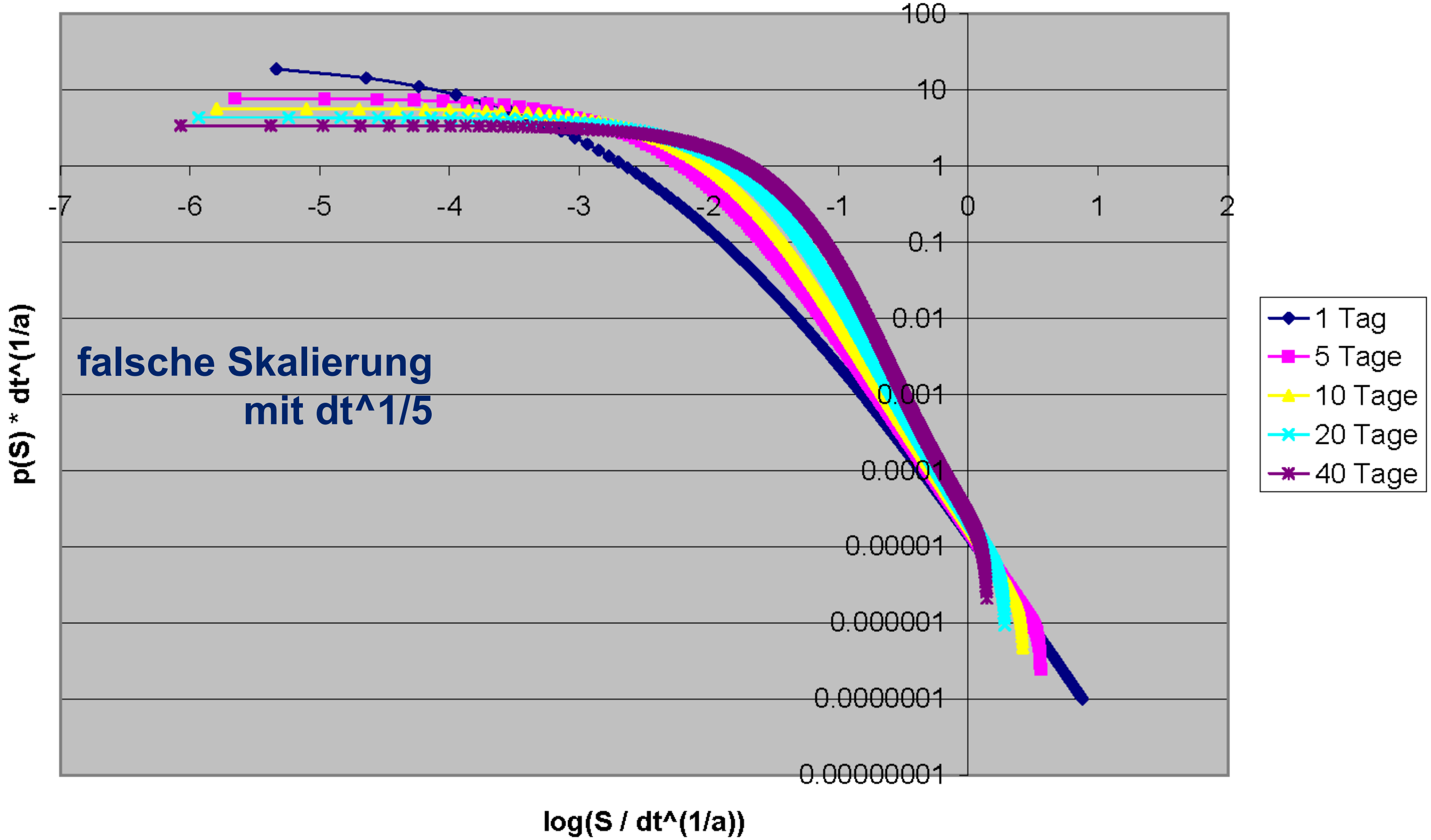
$\alpha = 3$

$$p(S) \propto \frac{1}{(|S| + 0.1)^{\alpha+1}}$$



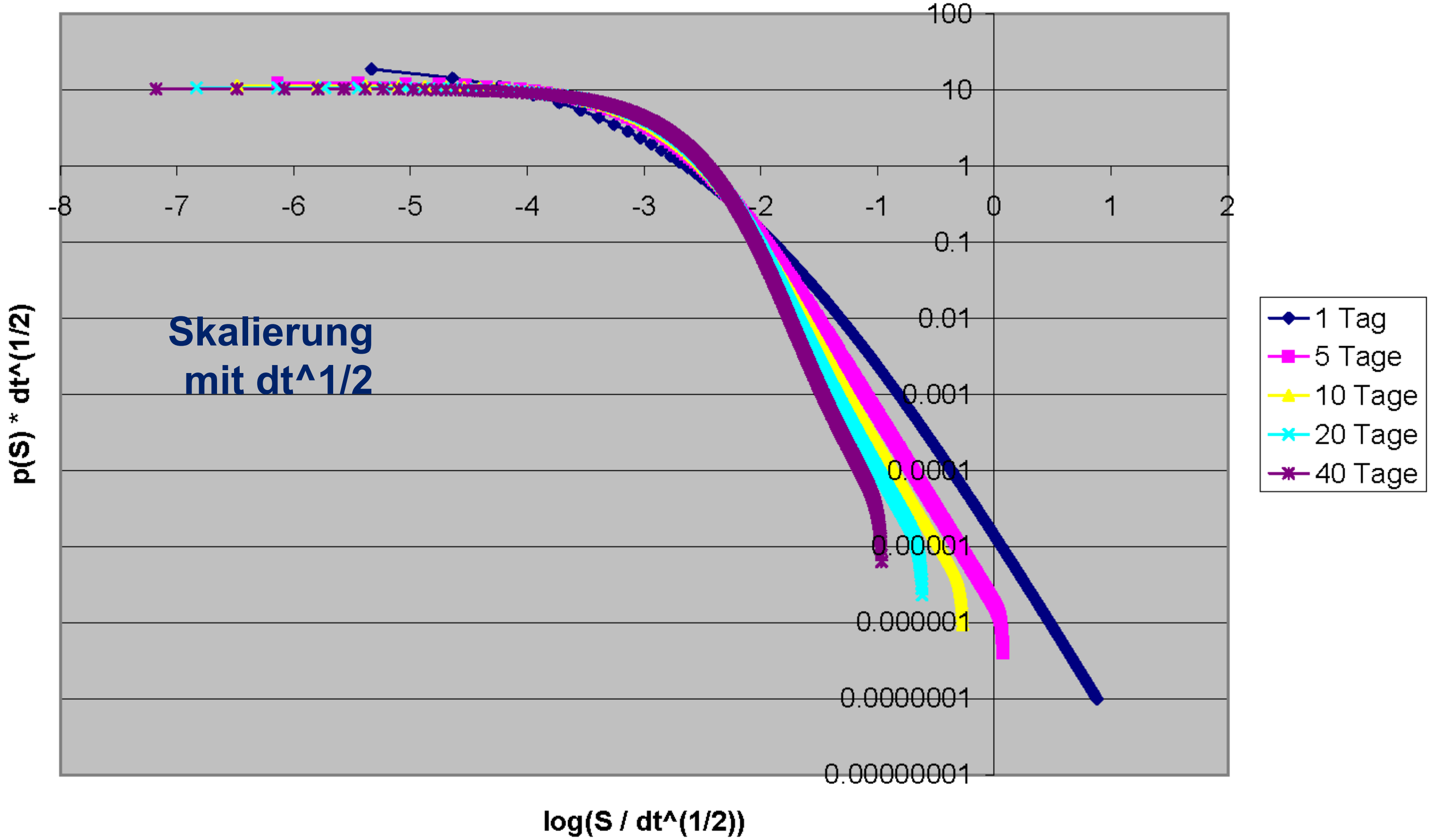
$\boxed{\alpha = 5}$

$$p(S) \propto \frac{1}{(|S| + 0.1)^{\alpha+1}}$$



$\alpha = 5$

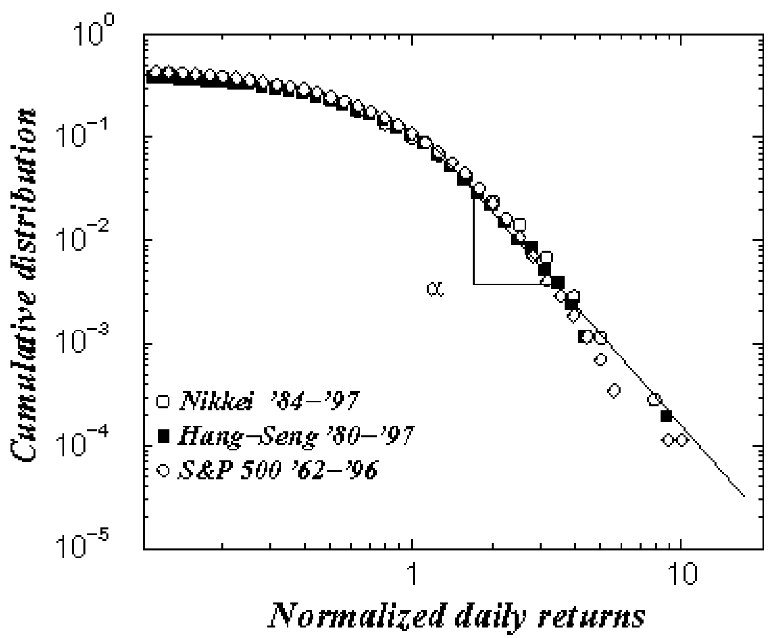
$$p(S) \propto \frac{1}{(|S| + 0.1)^{\alpha+1}}$$

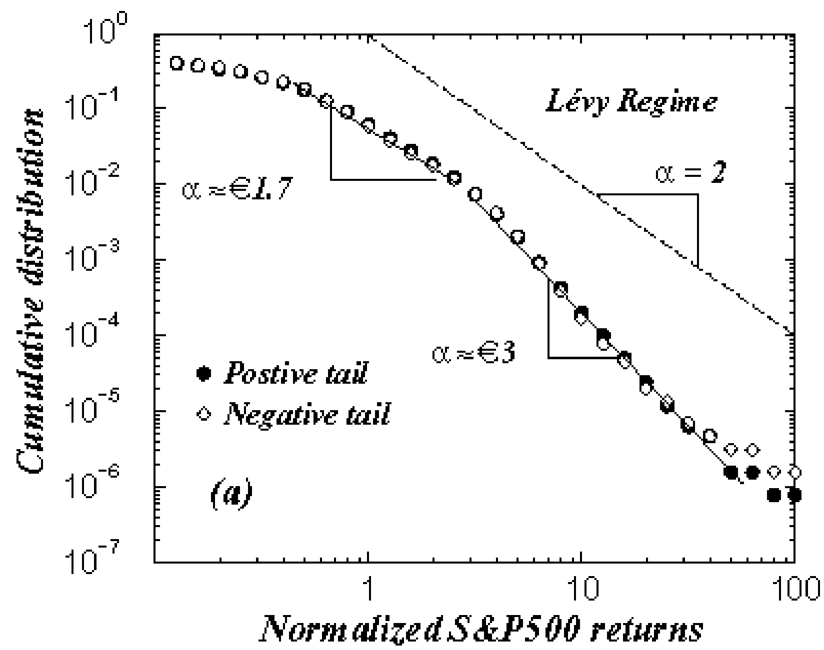


Analyse von Kursänderungen

log-Return für Indizes

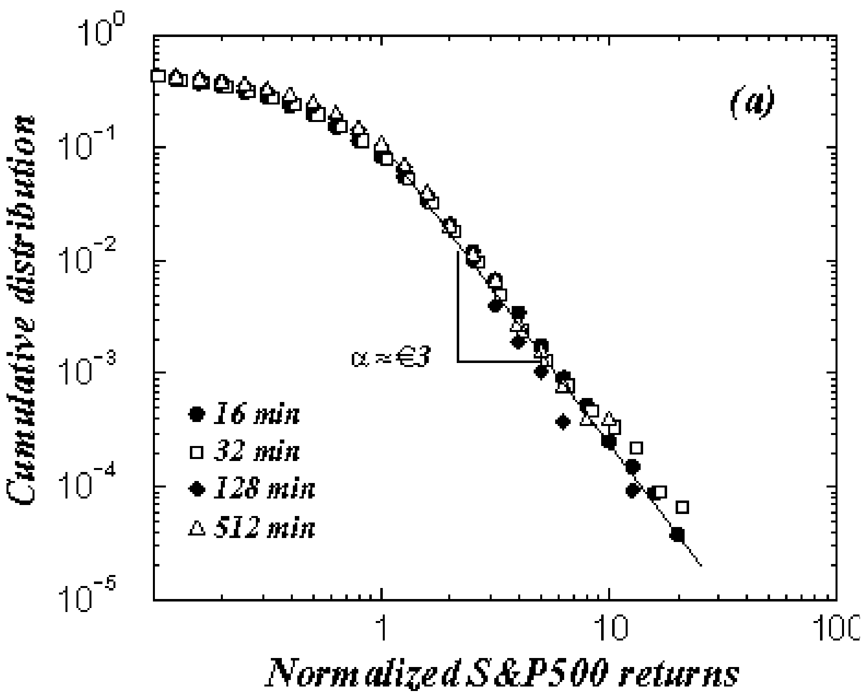
- Potenzgesetz mit $\alpha \approx 3$
- Varianz < ∞



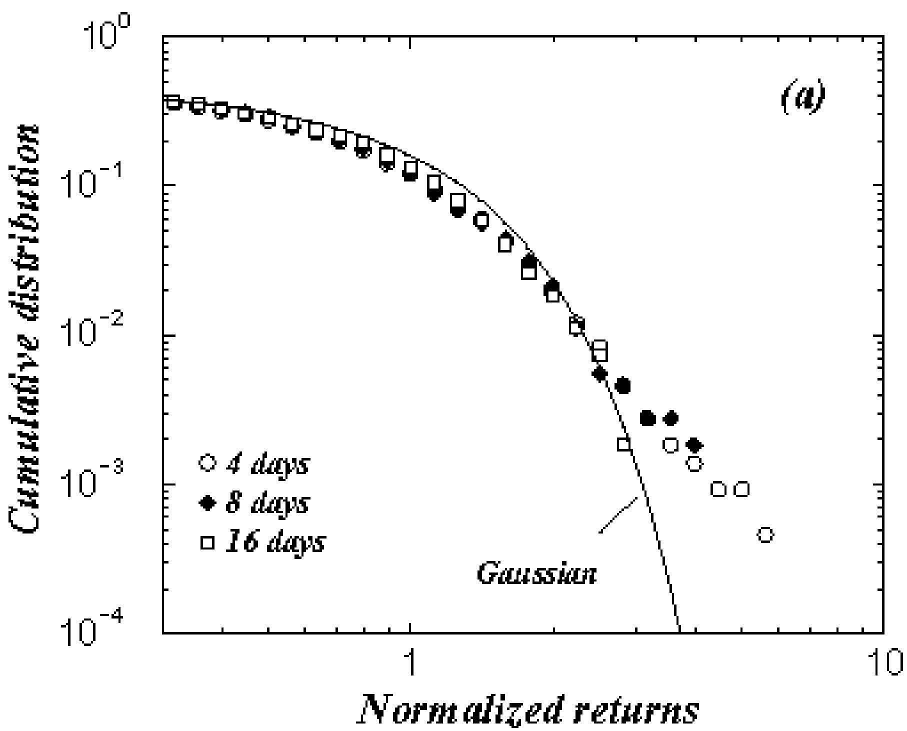


Gopikrishnan et al., cond-mat/9905305 (1999).

Konvergenzverhalten für Preisänderungen

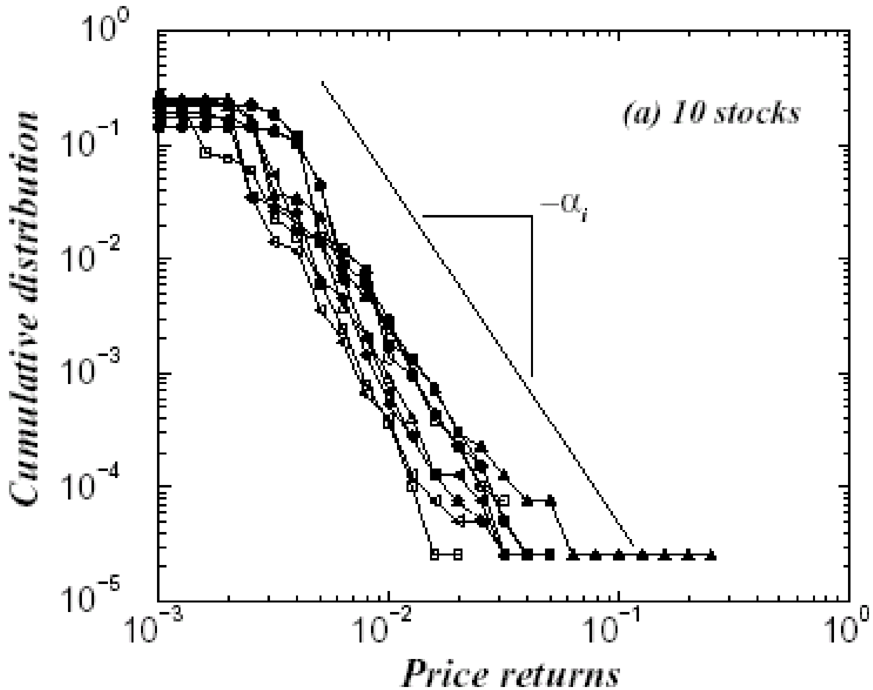


- Langsame Konvergenz gegen eine Gaußverteilung

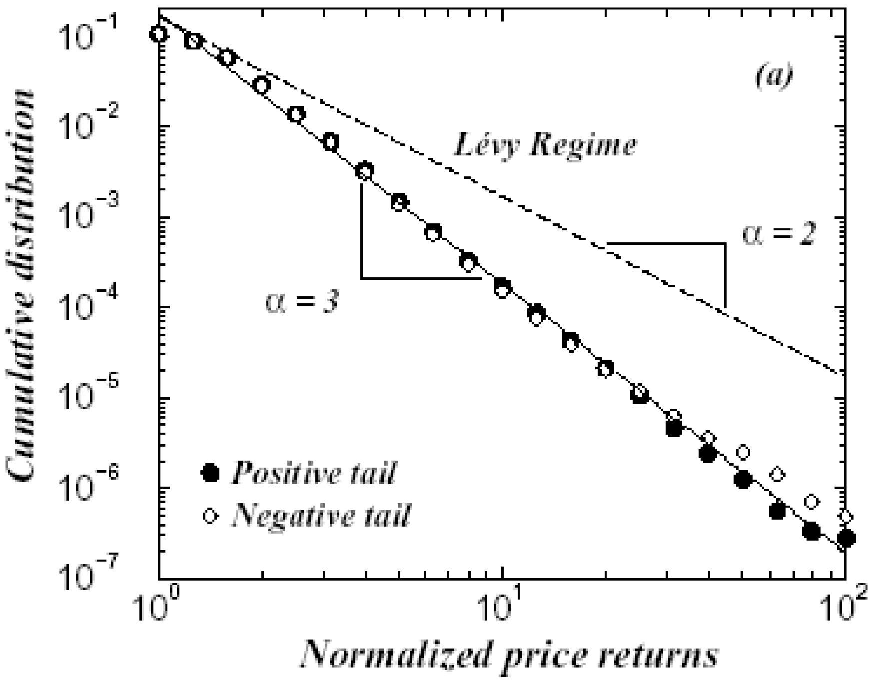


Gopikrishnan et al., cond-mat/9905305 (1999).

Analyse von **Aktien**kursen

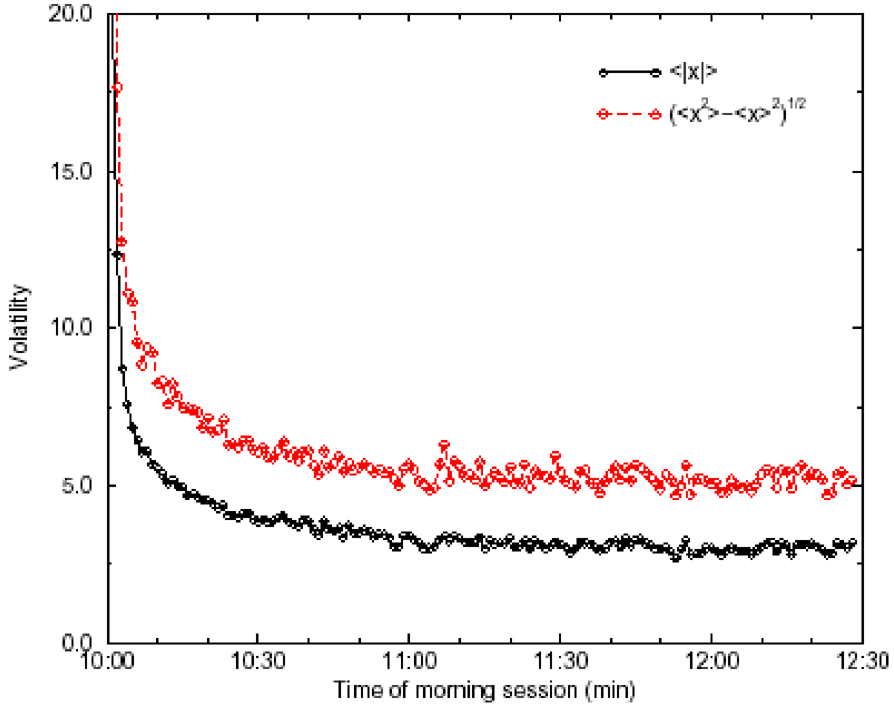


- Ähnliches Verhalten wie Indizes

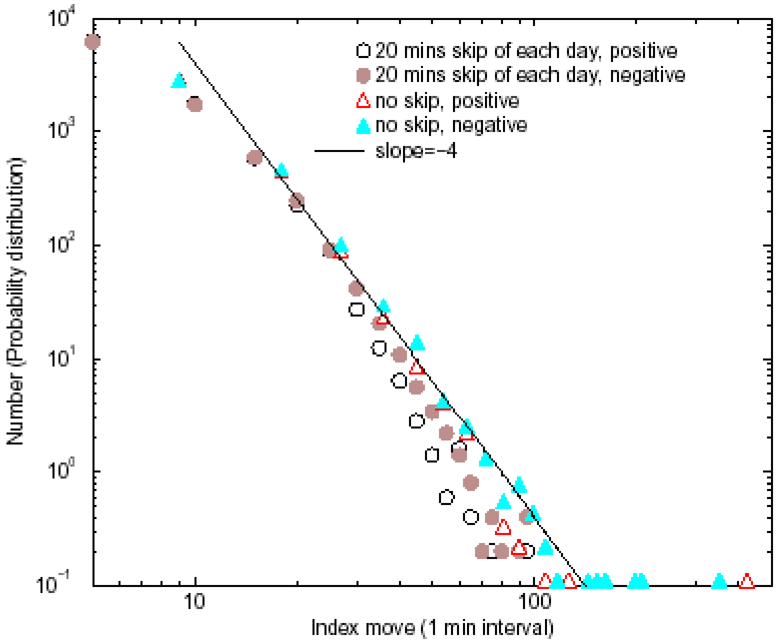


Gopikrishnan et al., cond-mat/9907161 (1999).

Preisänderungen bei Börsenöffnung



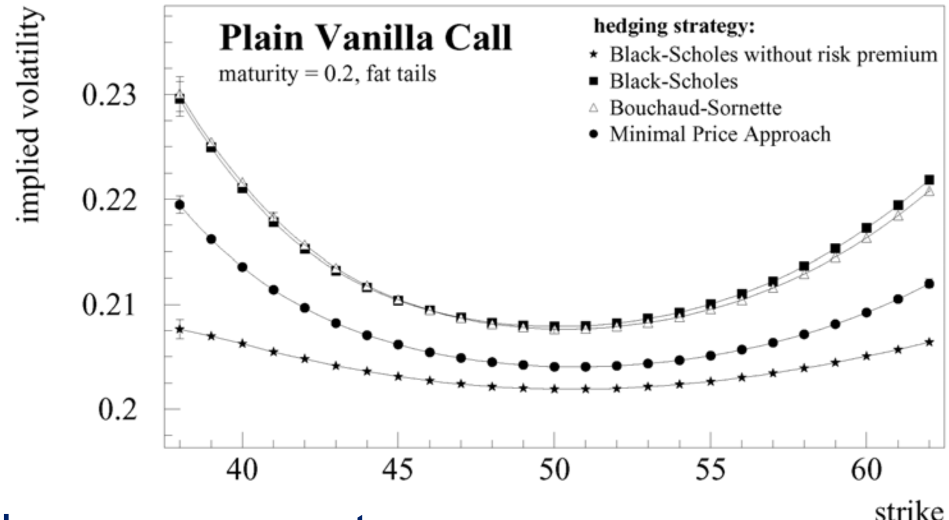
- hohe Volatilität
- ohne Börsenöffnungszeit: widersprüchliche Ergebnisse (exponentielle oder Potenzverteilung)



Huang, cond-mat/0006145 (2000).

Auswirkungen von „Fat Tails“

- Optionsbewertung:
  - Voraussetzungen für Black-Scholes nicht erfüllt
  - Alternative Bewertungsmethoden



- Risikomanagement
- Portfoliotheorie

Bouchaud, Potters. *Theory of Financial Risks* (2000).
Oest. *Option Pricing for Discrete Hedging and non-Gaussian prozesses.*

Zusammenfassung Preisanalyse

- Korrelationen in den Zeitreihen
  - exponentieller Abfall der Korrelation
  - **Preisänderungen sind unkorreliert für $\Delta t > 20$ min**
- Wahrscheinlichkeitsverteilung für Preisänderungen
  - Abweichung von einer Normalverteilung („Fat Tails“)
  - Indizes und Aktienpreise zeigen ähnliches Verhalten
  - Durch **Potenzverteilung mit $\alpha \approx 3$** beschreibbar
  - Langsame Konvergenz gegen eine Gaußverteilung
  - Tageszeiteneffekte
- Wechselkurse, Anleihen
  - Ähnliches Verhalten bei Autokorrelation und Tails
- Börsencrashs häufiger als „erwartet“
  - Extrapolation der Tails: P(crash Okt 1987) << 40 Jahre

Bouchaud, Potters, *Theory of Financial Risk* (2000).

Zusammenfassung Preisanalyse

Kurzfristige Preisänderungen sind im wesentlich stochastisch und nicht vorhersagbar...

.... dazu noch ein Beispiel:

„Bürokraft verkauft Aktien für 4 Mrd. statt für 4 Mio. Dollar

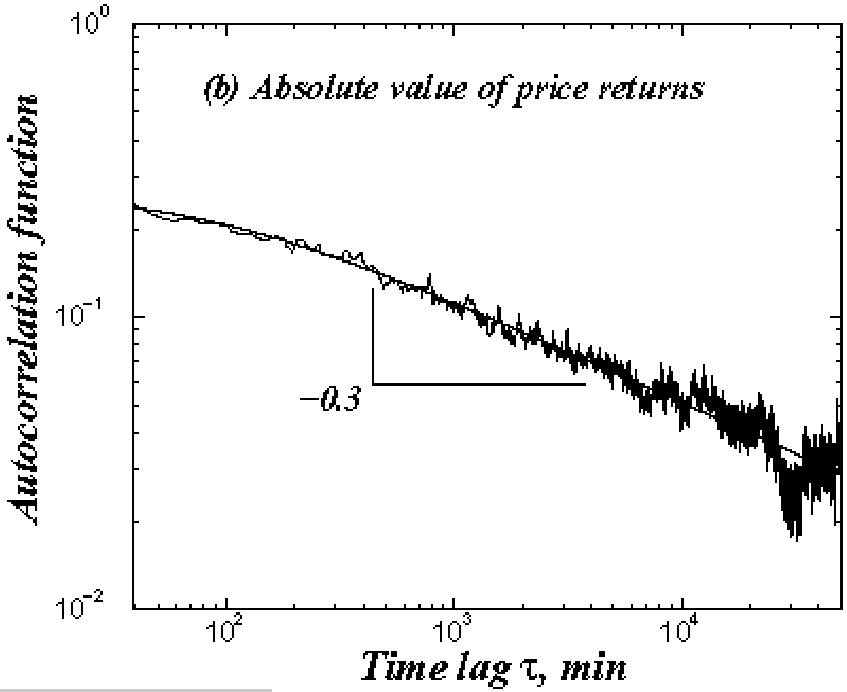
Ein simpler Tippfehler hat am Mittwoch den Kurzsturz im späten Handel an der Wall Street ausgelöst. Eine Bürokraft der US-Investmentbank Bear Stearns hatte nicht wie beabsichtigt Aktien im Wert von 4 Mio. $ verkauft, sondern 20 Minuten vor Börsenschluss ein Volumen von 4 Mrd. $ eingegeben. Erst nachdem Aktien im Wert von 622 Mio. $ verkauft worden waren, wurde der Vorgang gestoppt.

Der Schreibfehler ..... hatte Panik ausgelöst.“

Financial Times Deutschland, 4.10.2002

Analyse von Volatilitäten

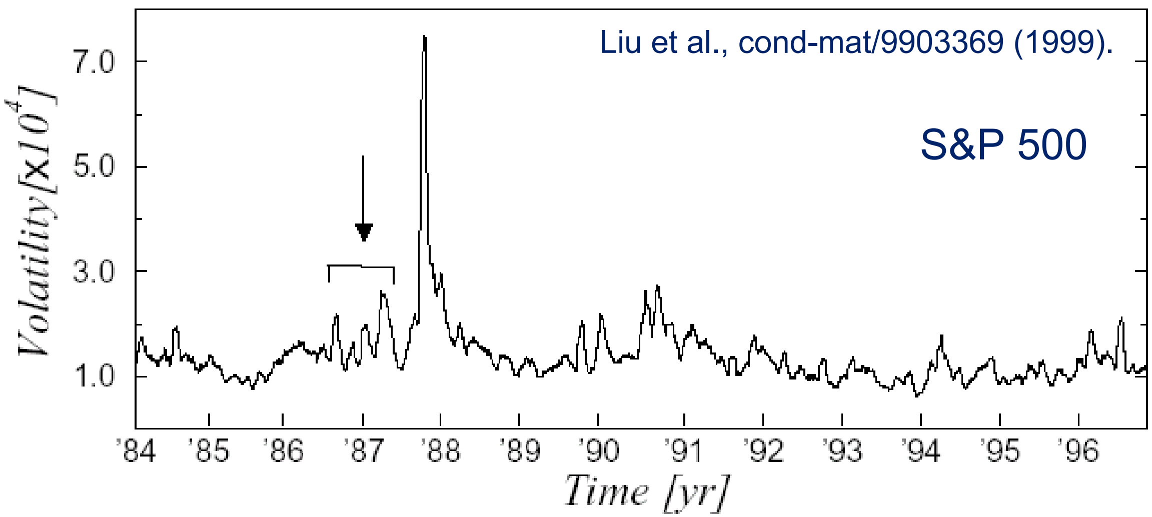
- Untersuchung des 2. Moments
- Black-Scholes Annahme: Volatilität ist konstant
- Varianz < ∞

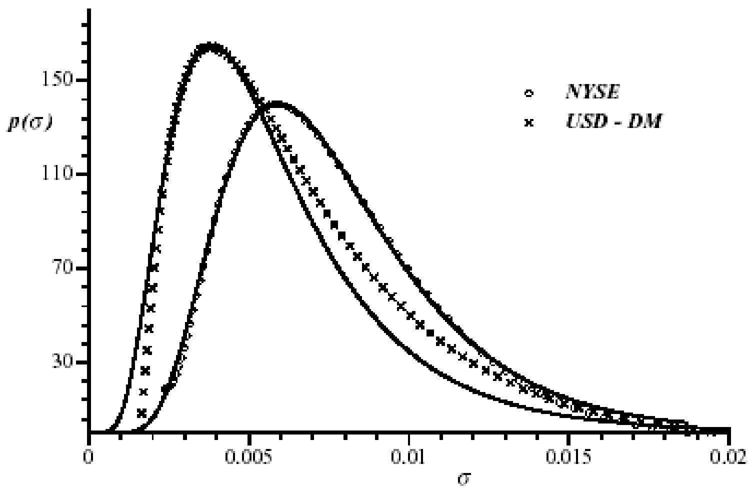


<u>Absolute Preisänderungen:</u>
Langzeitkorrelation

⇒ Volatilität ist in erster Näherung konstant

Gopikrishnan et al., cond-mat/9905305 (1999).





- Volatilität zeigt log-Normalverteilung
- Volatility cluster

Pasquini, Serva, cond-mat/9903334 (1999).

Analyse von Korrelationen

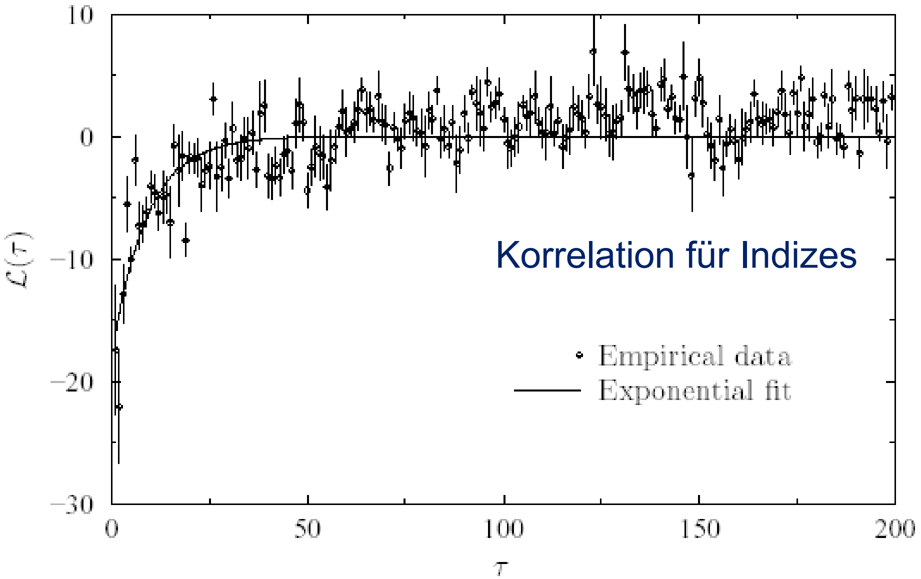
Korrelationen in einer Zeitreihe

- Return unkorreliert für Δt > 20 min
- |Return| korreliert $\Rightarrow$ Volatilität annähernd konstant
- **Korrelation zwischen Return und Volatilität**

Korrelation:

$$\frac{\left\langle R^2(t+\tau)\cdot R(t)\right\rangle}{\left\langle R^2(t)\right\rangle^2}$$

- Korrelation für Indizes und Einzelaktien beobachtet
- Ursache unklar

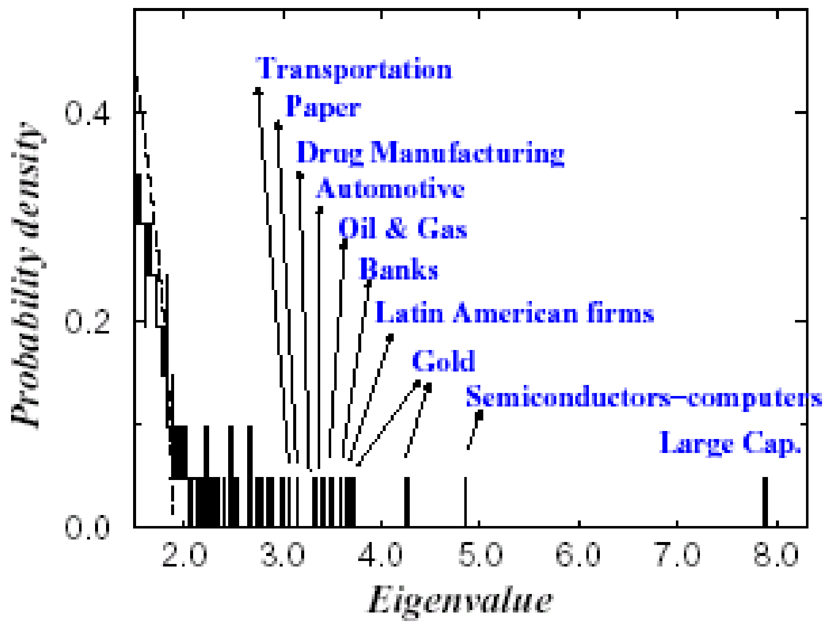


Bouchaud et al., cond-mat/0101120 (2001).

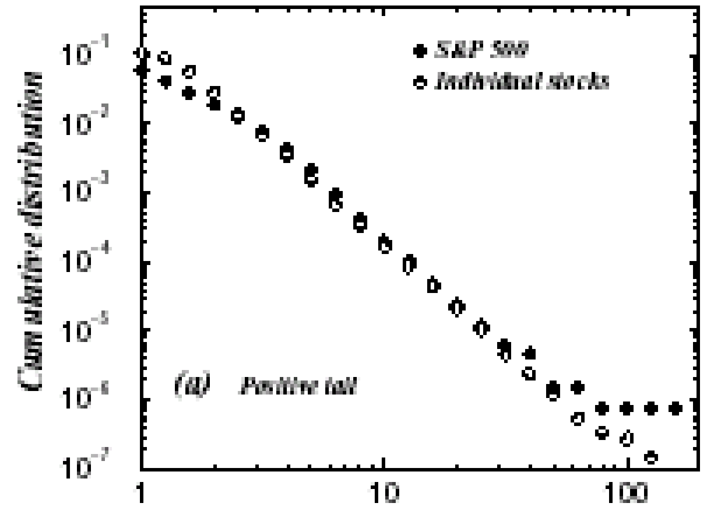
Analyse von Korrelationen

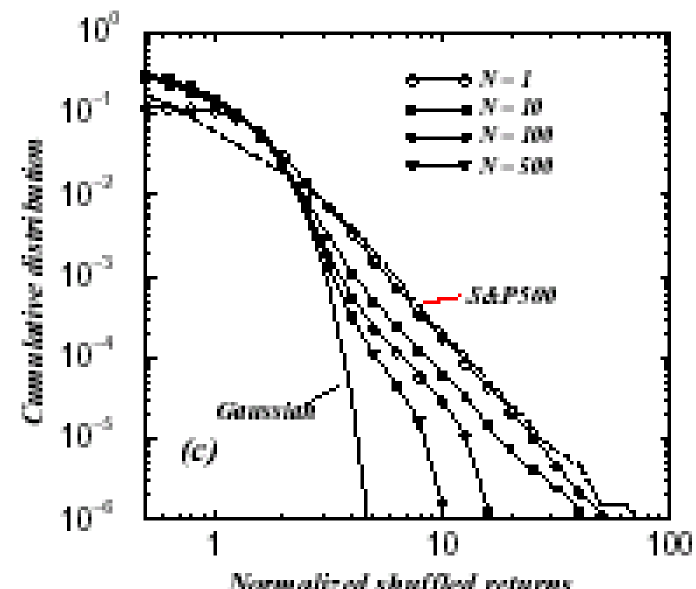
Korrelationen zwischen Aktien

- Aktien und Indizes haben ähnliche Return-Verteilung
  - ⇒ **Aktien sind korreliert**
- Analyse der Korrelationsmatrix zu einem Index
  - ⇒ **Aktien aus dem gleichen Industriesektor sind stark korreliert**



Plerou et al., cond-mat/0108023 (2001).





Plerou et al., cond-mat/9907161 (1999).

Langfristiger Kursanstieg (Renditen)

Mangelnde Statistik, um die Rendite aus Zeitreihen zu schätzen:

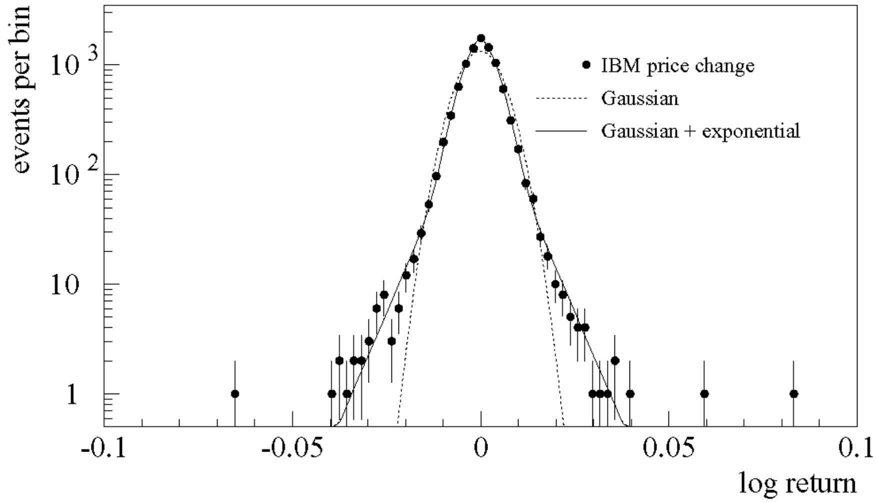
- Beispiel:
  - Volatilität = 0.2, Rendite = Zinsrate + 0.08 = 0.13
  - Um 3 σ Effekt zu beobachten benötigt man einen Zeitraum Δt mit:

$$\text{Rendite} \cdot \Delta t > 3 \cdot \text{Volatilität} \cdot \sqrt{\Delta t}$$

  - ⇒ Δt > 21 Jahre

- Fit an IBM-Daten (30 Jahre):

  Rendite = (5.2 ± 3.9) %



- Verschiedene Analysen:

  Rendite = Zinsrate + (3 – 9) % *

⇒ Schätzung mittels ökonomischer Parameter

* J. Claus, J. Thomas, J. of Finance, Vol. LVI, No.5, 1629-1666 (2001).

Zusammenfassung:

Analyse von Kursänderungen

- Kursänderungen unkorreliert für $\Delta t > 30$ min
- „Fat Tails“ mit Potenzverhalten ($\alpha \approx 3$)
- Langsame Konvergenz gegen eine Normalverteilung
- Ähnliches Verhalten von Indizes, Aktien, Wechselkursen und Anleihen
- Rendite kann aus Zeitreihen nicht genau bestimmt werden

Analyse der Volatilität

- Volatilität in erster Näherung konstant
- Volatilitäts Cluster

Korrelationen

- Korrelationen von Volatilitäten mit Preisänderungen
- Preisänderungen bei Aktien sind korreliert

d-fine

deepest understanding finest consulting

d-fine GmbH

Mergenthalerallee 55

65760 Eschborn

Germany

T: +49/(0)6196/7697-0

F: +49/(0)6196/7697-19-00

www.d-fine.de