Vorlesungsreihe „Econophysics“

IX. Heidelberger Graduiertenkurse, 7. – 11. Oktober 2002

Einführung in die Bewertung von Finanzinstrumenten: Zinsen, Forwards, Futures

Priv.-Doz. Dr. Jürgen Stein

IX. Heidelberger Graduiertenkurse, 7. Oktober 2002

Inhalt

1 – Einführung: d-fine GmbH, Übersicht der Vorlesungsreihe

2 – Zinsen

3 – Überblick über Zinsinstrumente

4 – Beispiel: Bewertung einer Anleihe

5 – Zinsstrukturkurven

6 – Termingeschäfte (Forwards, Futures)

7 – Anwendung: Bewertung eines „Floaters“

Inhalt

1 – Einführung: d-fine GmbH, Übersicht der Vorlesungsreihe

2 – Zinsen

3 – Überblick über Zinsinstrumente

4 – Beispiel: Bewertung einer Anleihe

5 – Zinsstrukturkurven

6 – Termingeschäfte (Forwards, Futures)

7 – Anwendung: Bewertung eines „Floaters“

Einführung: d-fine GmbH

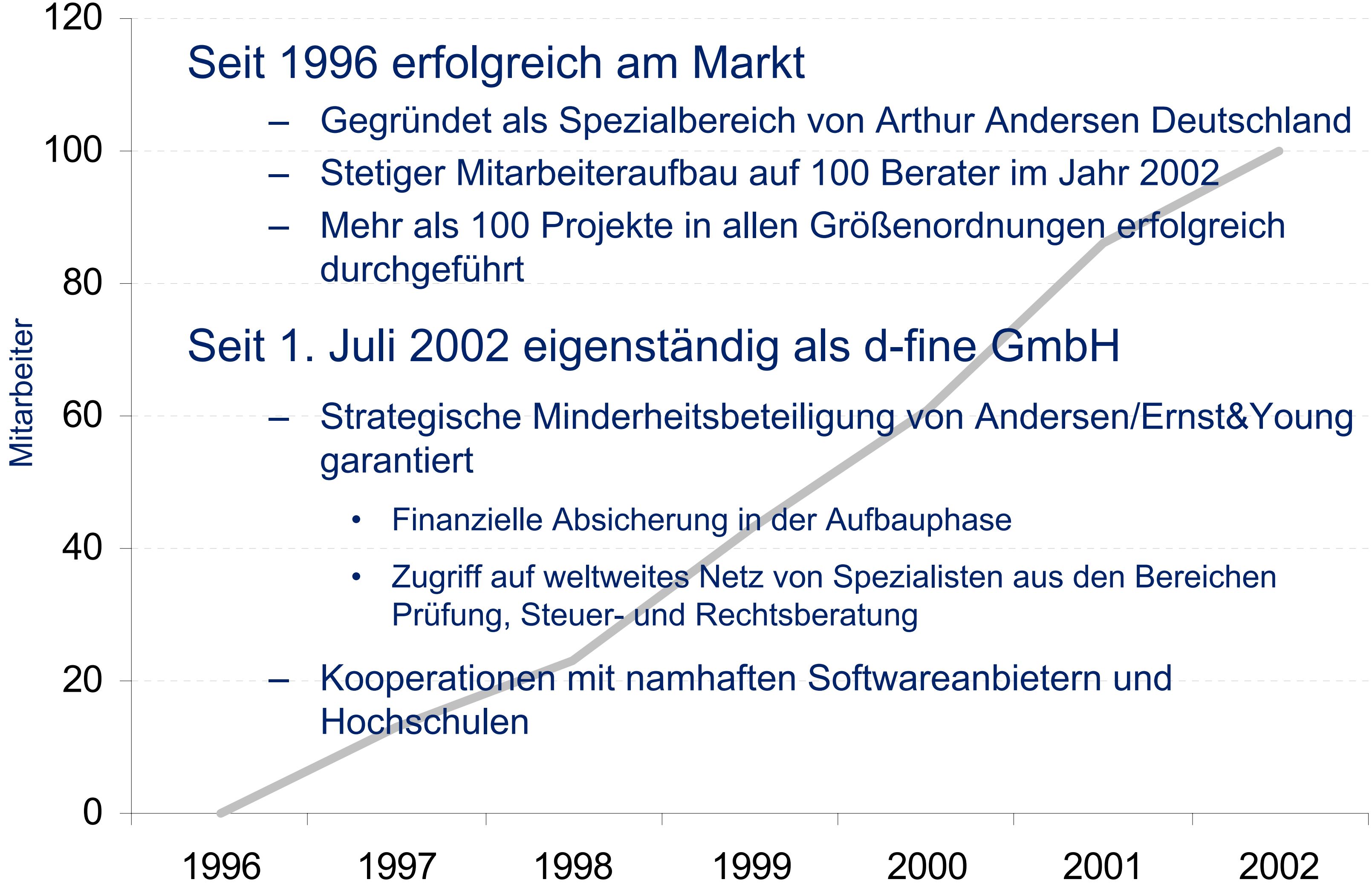
- d-fine ist mit über 100 Beratern eines der größten Beratungsunternehmen in Deutschland, das sich ausschließlich auf die Anforderungen der Finanzwelt spezialisiert hat.

- d-fine berät Banken, Versicherungen und Industrieunternehmen beim Aufbau ihrer Handels-, Kredit-, und Risikomanagement-Systeme
  - von der ersten Idee bis zur professionellen Implementierung der Lösung
  - vom finanzmathematischen Modell bis zur real-time Schnittstelle
  - vom plain-vanilla Kredit bis zum exotischen Derivat.

- Mitarbeiter:
  - 70% mit Abschluss in Physik
  - 20% mit Abschluss in Mathematik
  - 10% mit Abschluss in Informatik oder BWL

  - 80% mit Promotion

Die Geschichte von d-fine



Seit 1996 erfolgreich am Markt

– Gegründet als Spezialbereich von Arthur Andersen Deutschland
– Stetiger Mitarbeiteraufbau auf 100 Berater im Jahr 2002
– Mehr als 100 Projekte in allen Größenordnungen erfolgreich durchgeführt

Seit 1. Juli 2002 eigenständig als d-fine GmbH

– Strategische Minderheitsbeteiligung von Andersen/Ernst&Young garantiert
  - Finanzielle Absicherung in der Aufbauphase
  - Zugriff auf weltweites Netz von Spezialisten aus den Bereichen Prüfung, Steuer- und Rechtsberatung
– Kooperationen mit namhaften Softwareanbietern und Hochschulen

Einführung: Vorlesungsübersicht

J. Stein: *Einführung in die Bewertung von Finanzinstrumenten*

J. Rank: *Stochastische Prozesse und Black-Scholes-Gleichung*

Th. Oest: *Empirische Grundlagen und Portfolio-Theorie*

H.-P. Deutsch: *Value-at-Risk*

M. Mayr: *Bewertung von Wetter- und Energiederivaten*

Inhalt

1 – Einführung: d-fine GmbH, Übersicht der Vorlesungsreihe
2 – Zinsen
3 – Überblick über Zinsinstrumente
4 – Beispiel: Bewertung einer Anleihe
5 – Zinsstrukturkurven
6 – Termingeschäfte (Forwards, Futures)
7 – Anwendung: Bewertung eines „Floaters“

Zinsen – Definition

Definition:

Zinsen bezeichnen eine vom Schuldner zu entrichtende Vergütung für die Überlassung von Kapital. Damit quantifizieren Zinsen den (Zeit-)Wert des Geldes.

Höhe der Zinszahlungen:

- verleihe Geldbetrag der Höhe N für (kurzen) Zeitraum δt
- erwarteter Zinsbetrag:

$$\Delta N = \underbrace{r}_{\text{Zinssatz}}(t, \delta t) \cdot N \cdot \delta t$$

Zinsmethoden

betrachte Gesamtbetrag nach Zeitraum ΔT, d.h. eingesetztes Kapital und auf-gelaufene Zinsen:

- einfache Verzinsung (kurze Laufzeiten, Anwendung am Geldmarkt):

$$N(t+\Delta T) = (1 + r_e \cdot \Delta T) N(t)$$

- diskrete Verzinsung (Zinseszins – compound interest; Anwendung bei längeren Laufzeiten, Kapitalmarkt):

$$N(t+\Delta T) = \left(1 + r_d \frac{\Delta T}{m}\right) N\left(t + \frac{(m-1)\Delta T}{m}\right) = \left(1 + r_d \frac{\Delta T}{m}\right)^m N(t)$$

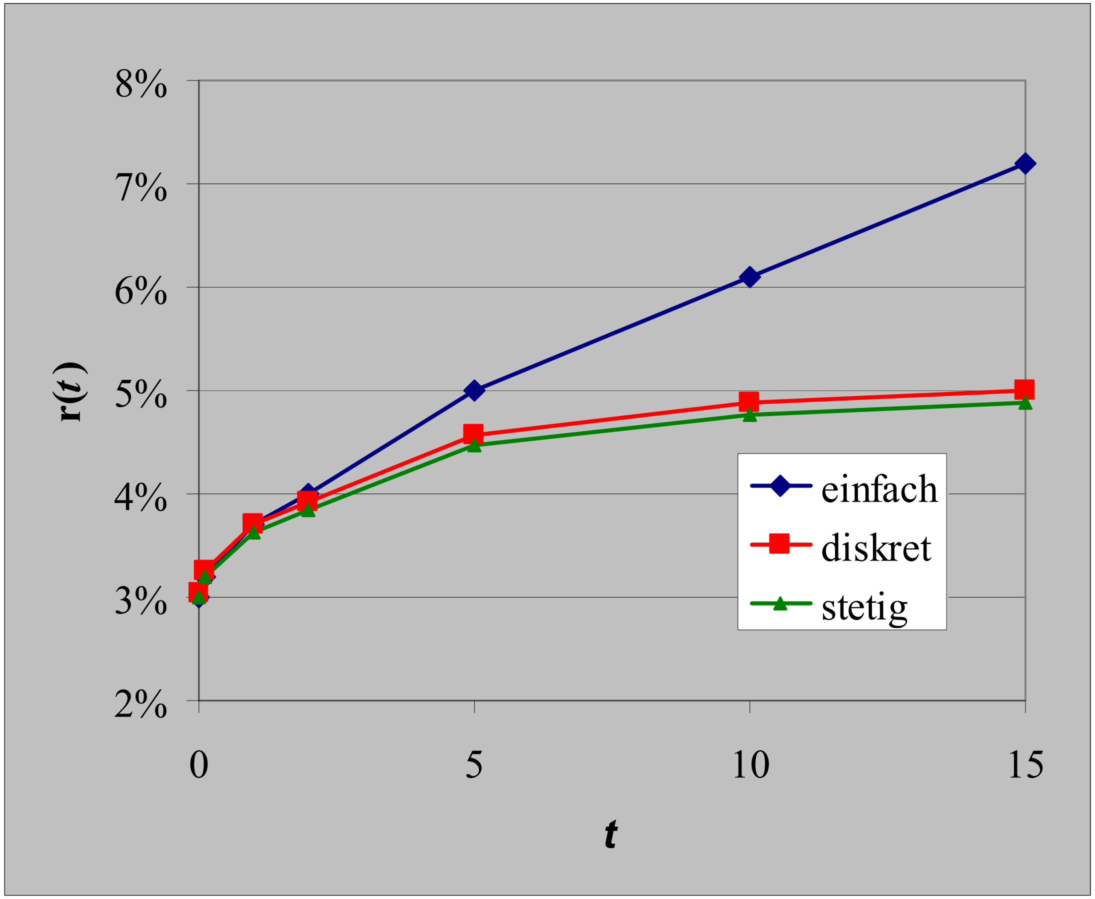
- stetige Verzinsung (für große m: continuous-time finance; Anwendung in der Optionspreistheorie):

$$N(t+\Delta T) = \left(1 + r_s \frac{\Delta T}{m}\right)^m N(t) = N(t) e^{m \ln\left(1 + r_s \frac{\Delta T}{m}\right)} \approx N(t) e^{r_s \Delta T}$$

Vergleich der Zinsmethoden

	Zinssatz		
Laufzeit	einfach	diskret	stetig
t	$r_e(t)$	$r_d(t)$	$r_s(t)$
0,01	3,0000%	3,0450%	2,9996%
0,1	3,2000%	3,2465%	3,1949%
1	3,7000%	3,7000%	3,6332%
2	4,0000%	3,9230%	3,8481%
5	5,0000%	4,5640%	4,4629%
10	6,1000%	4,8776%	4,7623%
15	7,2000%	5,0036%	4,8825%

Die verschiedenen Zinssätze und -methoden liefern jeweils die selben Zinsbeträge.



Konventionen

neben Zinssatz und Zinsmethode werden zur Berechnung der Zinsen noch die folgenden Angaben benötigt:

- Tagesberechnungsmethode (day-count method):
  Vorschrift zur Berechnung der Zinsperiode ΔT, z.B.
  - Act/Act: Berechne ΔT aus der tatsächlichen Anzahl von Zinstagen, die in der entsprechenden Zinsperiode und im entsprechenden Jahr liegen.
  - 30/360: Berechne ΔT basierend auf der Konvention, dass ein Monat 30 Tage und ein Zinsjahr 360 Tage hat.

- business-day conventions:
  Konventionen, wie mit an Feiertagen und Wochenenden fälligen Zinszahlungen zu verfahren ist, z.B.
  - following: Zahltag wird auf den nächsten Bankarbeitstag gelegt
  - modified following: wie following; liegt der nächste Bankarbeitstag allerdings im nächsten Monat, so wird der vorhergehende Bankarbeitstag gewählt

Diskontfaktoren

Die verschiedenen Konventionen und Berechnungsmethoden können durch Einführung der folgenden Notation zusammengefasst werden:

$$N(T) = Z_r^{-1}(t,T) \cdot N(t)$$

Zinssatz Beginn der Zinsperiode Ende der Zinsperiode

($\Delta T = T - t$)

$Z_r^{-1}(t,T)$ liefert, unabhängig von den verwendeten Konventionen, den zukünftigen Wert eines heutigen Geldbetrages, d.h.

$Z_r(t,T)$ liefert den heutigen Wert (abgezinsten oder diskontierten Betrag) eines zukünftigen Cashflows (1 EUR); (i.a. $0 < Z_r(t,T) < 1$)

$Z_r(t,T)$ wird daher als Diskontfaktor bezeichnet

Zinsmethoden und ihre Anwendung

Lineare Verzinsung: amerikanischer Geldmarkt
Einfache Verzinsung: Devisenmarkt, europäischer Geldmarkt
Diskrete Verzinsung: Kapitalmarkt
Stetige Verzinsung: Bewertung von Optionen, „Mathematical Finance“

	Faktor zur Abzinsung	Faktor zur Aufzinsung	Zinsen
Allgemein	$Z_r(t,T)$	$Z_r(t,T)^{-1}$ (i.a.)	$Z_r(t,T)^{-1}-1$
Lineare Verz.	$1-r(T-t)$	$1+r(T-t)$	$r(T-t)$
Einfache Verz.	$[1+r(T-t)]^{-1}$	$1+r(T-t)$	$r(T-t)$
Diskr. jährl. Verz.	$(1+r)^{-(T-t)}$	$(1+r)^{T-t}$	$(1+r)^{T-t}-1$
Diskr. (1/*m*)-jährl. Verz.	$(1+{}^{r}\!/_{m})^{-m(T-t)}$	$(1+{}^{r}\!/_{m})^{m(T-t)}$	$(1+{}^{r}\!/_{m})^{m(T-t)}-1$
Stetige Verz.	$e^{-r(T-t)}$	$e^{r(T-t)}$	$e^{r(T-t)}-1$

Inhalt

1 – Einführung: d-fine GmbH, Übersicht der Vorlesungsreihe

2 – Zinsen

3 – Überblick über Zinsinstrumente

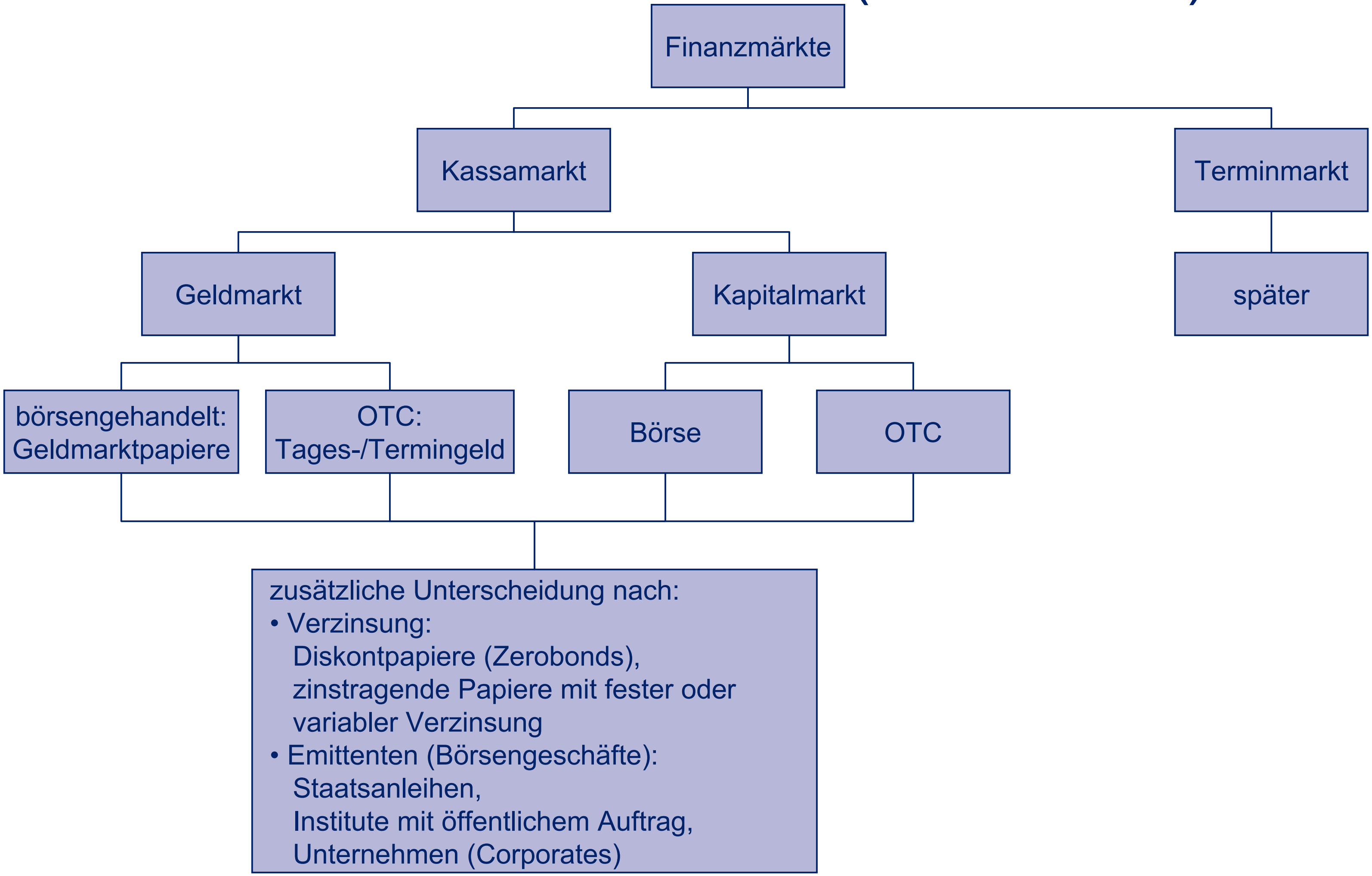
4 – Beispiel: Bewertung einer Anleihe

5 – Zinsstrukturkurven

6 – Termingeschäfte (Forwards, Futures)

7 – Anwendung: Bewertung eines „Floaters“

Überblick über Zinsinstrumente (Kassamarkt)



Finanzmärkte – Grundbegriffe

- Kassamarkt: auch Spot-Markt; Markt für Finanzgeschäfte, die sofort (d.h. innerhalb kurzer, durch Handelsusancen bestimmter Fristen) zu erfüllen sind.
- Terminmarkt: Markt für Finanzgeschäfte, die an einem in der Zukunft liegenden Termin zu erfüllen sind.
- Geldmarkt: Markt für kurzfristige Zinsprodukte – (Rest-)Laufzeit < 1Y
- Kapitalmarkt: Markt für längerfristige Finanzmittelbeschaffung
- börsengehandeltes Geschäft: standardisiertes Geschäft, bei dem die Börse als Kontrahent fungiert
- Over-the-Counter (OTC) Geschäft: nicht standardisiertes, direkt zwischen zwei Kontrahenten vereinbartes Geschäft

Finanzmärkte – Grundbegriffe II

- zinstragendes Papier: Zinsprodukt mit laufenden Zinszahlungen (Coupon Bond)
- Festzinsanleihe: Kuponbond mit über die gesamte Laufzeit festgelegtem Zinssatz (Straight Bond)
- variabel verzinsliche Anleihe: Anleihe, bei der der Zinssatz für jeden Zinstermin neu festgelegt wird (Floating Rate Note, „Floater“)
- Diskontpapier: Zinsprodukt ohne Kupon, das mit einem Abschlag vom Nennwert gehandelt wird (Nullkuponanleihe, Zero Bond)

Inhalt

1 – Einführung: d-fine GmbH, Übersicht der Vorlesungsreihe

2 – Zinsen

3 – Überblick über Zinsinstrumente

4 – Beispiel: Bewertung einer Anleihe

5 – Zinsstrukturkurven

6 – Termingeschäfte (Forwards, Futures)

7 – Anwendung: Bewertung eines „Floaters“

Bewertung eines Straight Bonds

Definition Straight Bond:

der Kreditfinanzierung dienendes Wertpapier, das Gläubigerrechte verbrieft und dessen Zins zum Emissionszeitpunkt fest vereinbart wird.

Merkmale:

- Emittent: juristische Person, die das Wertpapier ausgibt
- Nominal: Nennwert des Wertpapiers, bezeichnet (bei Anleihen) die Höhe der Forderung
- Währung: Währung, in der das Wertpapier notiert
- Fälligkeit: Leistungszeitpunkte der Zinszahlungen und der Rückzahlung des Kapitals
- Verzinsung: Zinskupon und Konventionen bestimmen Verzinsung des Nominals
- Bonität: Kreditwürdigkeit des Emittenten
- Zusatzvereinbarungen
  z.B. über die Bereitstellung von Sicherheiten (Collaterals)
- Kurs: aktueller Wert des Finanzinstrumentes (Spot Price)

Beispiel: DaimlerChrysler-Anleihe DCX 7 03/21/11

8 DL17 Corp **DES**

WP BESCHREIBUNG Page 1/ 1

DAIMLERCHRYSLER DCX 7 03/21/11 102.4667/102.5667 (6.63/6.61) BGN @ 2/07

EMITTENTEN-INFORMATION
Name DAIMLERCHRYSLER INTL FIN
Typ Auto-Cars/Light Trucks
Emiss.Markt EURO MTN

WERTPAPIER-BESCHREIBUNG
Land NL Währung EUR
Sicherungsart COMPANY GUARNT
Zinsber.(1)STREET CONVENTION
Fälligkt 3/21/2011 Serie EMTN
NORMAL
Kupon 7 FIXED
ANNUAL ACT/ACT
Ankünd.Tag 3/ 8/01
Zinslauf ab 3/21/01
1.Abrechn.Tag 3/21/01
1.Zinszahlung 3/21/02
Ausg.Pr 99.5100 Reoffer 99.51
SPR @ FPR 236.7 vs DBR 5 ¼ 11
KEIN PROSPEKT

KENNUMMERN
Common 012646755
ISIN XS0126467553
BB number EC3583548

RATINGS
Moody's A3
S&P BBB+
Composite BBB1

EM.BETR.
Em.Betrag
EUR 1,000,000 (M)
Ausst.Betrag
EUR 1,000,000 (M)
Min Stück/Inkrement
1,000.00/ 1,000.00
Nennwert 1,000.00

KONSORT.FÜHRER/BÖRSE
CMZB,DB,JPM
LUXEMBOURG

1) Sonstige WPP.Info
2) Kennummer
3) Ratings
4) Gebühren/Beschränkg
5) Wertpp.-spezif.News
6) Beteiligte
7) Spezialnotiz
8) Emitt.Info
9) ALLQ
10) Preisquellen
11) Verwandte Wertpapie

65) Alte DES-Seite
66) Als Anlage senden

SR, UNSEC'D, UNSUB. ALSO SPREAD: 222.1BP OVER OAT 6.5% 4/25/11 & 182BP OVER MID-SWAPS. ALSO EBS. SERIES 35, TRANCHE 1. ALSO FRANKFURT SE.

Australia 61 2 9777 8600 Brazil 5511 3048 4500 Europe 44 20 7330 7500 Germany 49 69 920410
Hong Kong 852 2977 6000 Japan 81 3 3201 8900 Singapore 65 212 1000 U.S. 1 212 318 2000 Copyright 2002 Bloomberg L.P.
G756-330-0 08-Feb-02 10:03:57

Beispiel: DaimlerChrysler-Anleihe DCX 7 03/21/11 II

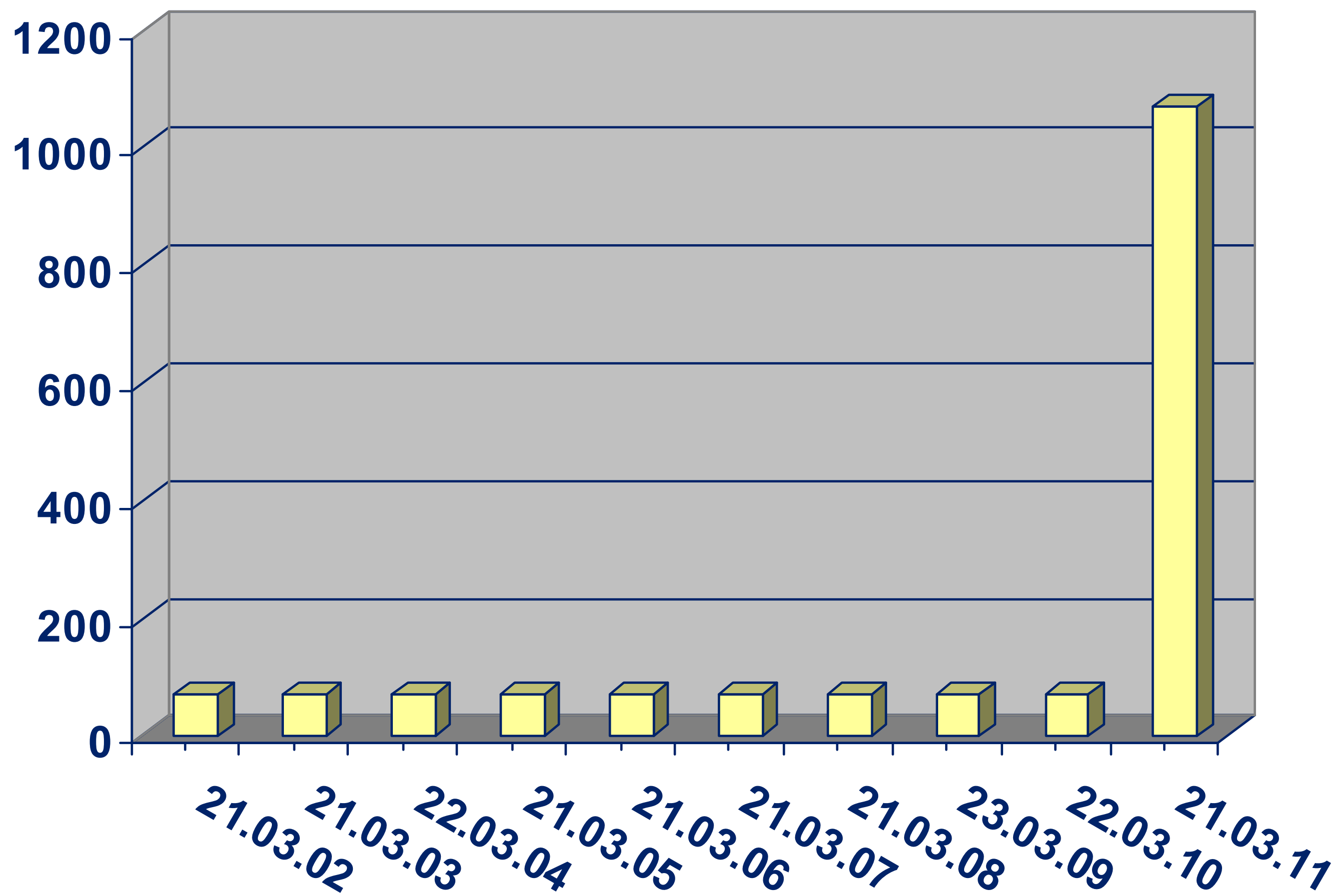
Zusammenfassung der Merkmale:

• Emittent	Daimler Chrysler International Finance
• Nominal	1.000.000 (1M); Mindeststückelung 1.000
• Währung	EUR
• Endfälligkeit (Maturity)	21.03.2011
• Verzinsung	7% (einfache Verzinsung, Act/Act), jährlich Zinszahlung
• Bonität	BBB (S&P)
• Sicherung	Garantie der Muttergesellschaft (Daimler Chrysler)

• sowie der Kurs, der nun berechnet werden soll ...

Cashflows der DaimlerChrysler-Anleihe

Zahlungsströme (Cashflows) der DaimlerChrysler-Anleihe



Barwert eines Finanzinstrumentes

im Beispiel: Höhe der Cashflows ist bekannt;
Frage: Wie ist der heutige Wert dieser Cashflows?

Erinnerung: heutiger Wert eines zukünftigen Cashflows von 1 EUR zum Zeitpunkt t_i ist durch den Diskontfaktor $Z_r(t,t_i)$ gegeben.

Dann ist der heutige Wert (Barwert, Present Value, Dirty Price) einer Anleihe (Kupon *K*, Nominal *N*, Endfälligkeit T, *k* Zinstermine) durch die Summe der diskontierten zukünftigen Cashflows gegeben:

$$V(t) = \sum_{i=1}^{k} Z_{r(t,t_i)}(t,t_i)\left(Z_K^{-1}(t_{i-1},t_i) - 1\right)N + Z_{r(t,T)}(t,T)N$$

Rendite, Stückzinsen, Clean Price

Preis eines Bonds wird typischerweise nicht als Barwert, sondern als Rendite oder Clean Price angegeben (quotiert):

- Sei *V(t)* gegeben. Dann ist die Rendite (Yield-to-Maturity) durch denjenigen Zinssatz $\bar{R}$ gegeben, für den die Gleichung

$$V(t) = \sum_{i=1}^{k} Z_{\bar{R}}(t,t_i)\left(Z_K^{-1}(t_{i-1},t_i)-1\right)N + Z_{\bar{R}}(t,T)N$$

  erfüllt ist.

- Der Clean Price eines Finanzinstrumentes ist definiert als der Barwert abzüglich der aufgelaufenen Stückzinsen,

$$V_{Clean}(t) = V(t) - \left(Z_K^{-1}(t_0,t)-1\right)N$$

  wobei Stückzinsen (accrued interest) diejenigen Zinsen bezeichnen, die seit dem letzten Zahlungstermin (t_0) bis heute (*t*) aufgelaufen sind

Zinsstrukturkurven

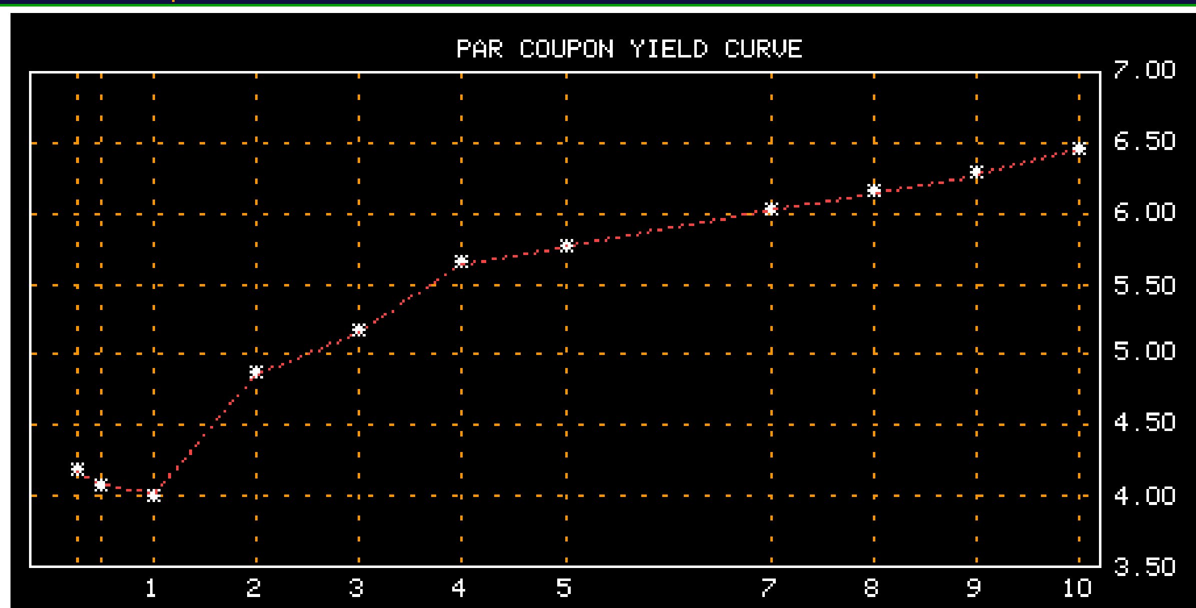
Zur Bewertung von Finanzinstrumenten müssen die Diskontfaktoren bekannt sein.

Sie können aus der Zinsstrukturkurve, d.h. der Abhängigkeit der Renditen liquider Zinsprodukte von ihrer Laufzeit bestimmt werden.
Die Renditen wiederum lassen sich aus den Preisen der am Markt gehandelten Zinsprodukte berechnen (Bootstrapping-Methode).

FAIR MARKET CURVE ANALYSIS

Sector 468 € Industrial BBB Type: Eurozone Page 1 of 6
Ticker:C468.. Curve freq: 1 Last fit to close: 2/ 7/02 15:24 ET

Yields	
3m	4.17
6m	4.07
1y	4.00
2y	4.86
3y	5.16
4y	5.63
5y	5.77
7y	6.01
8y	6.14
9y	6.26
10y	6.45



Bewertung der DCX 7 03/21/2001-Anleihe

nach den vorhergehenden Betrachtungen ergibt sich die folgende Bewertung:

Today	07.02.2002
Currency	EUR
Notional	1000
Fixed Rate	7,00%
Rating	BBB
Issue Date	21.03.2001
Maturity	21.03.2011

Present Value	**1092,42**
Accrued Interest	**62,14**
Clean Price	**103,03%**
Yield-to-Maturity	**6,1363%**
Duration	**6,2503**

Cashflow	Payment Date	Spot Rates	Discount Factor	Payment Amount	Discounted Cashflow
1	21.03.2002	4,17%	0,9951	70,00	69,66
2	21.03.2003	4,10%	0,9544	70,00	66,81
3	22.03.2004	4,90%	0,8990	70,00	62,93
4	21.03.2005	5,21%	0,8462	70,00	59,24
5	21.03.2006	5,65%	0,7872	70,00	55,10
6	21.03.2007	5,78%	0,7372	70,00	51,60
7	21.03.2008	5,90%	0,6890	70,00	48,23
8	23.03.2009	6,03%	0,6422	70,00	44,95
9	22.03.2010	6,15%	0,5969	70,00	41,78
10	21.03.2011	6,28%	0,5534	1070,00	592,11

Kursentwicklung der DCX 7 03/21/2011-Anleihe

Gründe für Kursentwicklung

- Zeitliche Veränderungen des Marktzinses
  (z.B. der Rendite für Staatsanleihen)

- Veränderungen in der Marktwahrnehmung der Kreditwürdigkeit des Schuldners

  Dies spiegelt sich wider in der Zinsdifferenz („Spread“) zwischen der Rendite der individuellen Anleihe und der allgemeinen Marktrendite (z.B. für risikolose Staatsanleihen).

Sensitivitäten

bisher: Betrachtung des Preises eines Finanzinstrumentes

jetzt: Abschätzung der Sensitivität eines Cashflow-Instrumentes bzgl. Veränderungen des zugrundeliegenden Marktparameters – hier: des Zinssatzes (Maß für das Risiko des Finanzinstrumentes).

dazu: betrachte kleine Änderung der Rendite, dann gilt:

$$\frac{dV_{\overline{R}}(t)}{V_{\overline{R}}(t)} = \frac{1}{V_{\overline{R}}(t)}\left(V_{\overline{R}+d\overline{R}}(t) - V_{\overline{R}}(t)\right) \approx -\underbrace{\left(-\frac{1}{V_{\overline{R}}(t)}\frac{\partial V_{\overline{R}}(t)}{\partial \overline{R}}\right)}_{D_{Mod}} d\overline{R} + \ldots$$

wobei D_{Mod} die „modified duration“ bezeichnet, die als Sensitivitäts-kennzahl ein Maß für das zinsinduzierte Kursrisiko von Zinsinstrumenten ist.

Inhalt

1 – Einführung: d-fine GmbH, Übersicht der Vorlesungsreihe
2 – Zinsen
3 – Überblick über Zinsinstrumente
4 – Beispiel: Bewertung einer Anleihe
5 – Zinsstrukturkurven
6 – Termingeschäfte (Forwards, Futures)
7 – Anwendung: Bewertung eines „Floaters“

Zinsstrukturkurven

Eine Zinstrukturkurve enthält Informationen darüber, welcher Zinssatz für welche Laufzeit einer Anleihe zu entrichten ist.

Von besonderer Bedeutung sind die Zero (oder Spot) Rates, da sie sich auf einen einzigen zukünftigen Cashflow beziehen.

In der Praxis ist daher die Berechnung von Zero Curves aus gehandelten Finanzinstrumenten von großer Bedeutung.

Berechnung von Zinsstrukturkurven

Methoden:

- Bootstrapping-Verfahren
  (Rekursive Berechnung der Zero-Rates für gewünschte diskrete Laufzeiten)

- Parametrische Verfahren
  (Funktionale Beschreibung der kompletten Kurve, Anpassung der Kurvenparameter an Marktdaten)

Berechnung von Zinsstrukturkurven: Beispiel

Berechnung einer Staatszinskurve (Government Zero Curve)

Gegeben seien 4 gehandelte Staatsanleihen mit (Rest-)Laufzeiten 1Y, 2Y, 3Y, 4Y und zugehörigen Marktpreisen *P*

Anleihe	Maturity	Kupon	Preis
1	1Y	5%	95
2	2Y	6%	100
3	3Y	8%	105
4	4Y	7%	104

Welche (Zero Rate) Zinsstruktur wird dadurch impliziert ?

Berechnung von Zinsstrukturkurven: Beispiel II

Struktur der Cashflows

Anleihe	Maturity	Kupon	Preis	Cashflow 1	Cashflow 2	Cashflow 3	Cashflow 4
1	1Y	5%	95	105			
2	2Y	6%	100	6	106		
3	3Y	8%	105	8	8	108	
4	4Y	7%	104	7	7	7	107

Passende Verteilung der Restlaufzeiten ermöglicht direkte rekursive Berechnung der Zero Rates.

Berechnung von Zinsstrukturkurven: Beispiel III

Damit ergeben sich die gesuchten Zero Rates aus den Diskontfaktoren *Z* der folgenden Gleichung (*P* Preis, *C* Kupon):

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+C_1 & & & \\ C_2 & 1+C_2 & & \\ C_3 & C_3 & 1+C_3 & \\ C_4 & C_4 & C_4 & 1+C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix}$$

Berechnung von Zinsstrukturkurven: Parametrische Verfahren

- Vasicek-Fong-Algorithmus (Marktzinskurve)

  Verwendung von kubischen Splines und „ordinary least mean square fit“ zur Anpassung der Zinskurve an Bondpreise

- Berechnung von Spreadkurven

  Verwendung geeigneter Basisfunktionen und „weighted multivariate regression with constraints“

  Probleme: mangelnde Liquidität, hohe Sensitivität der Ergebnisse

Inhalt

1 – Einführung: d-fine GmbH, Übersicht der Vorlesungsreihe

2 – Zinsen

3 – Überblick über Zinsinstrumente

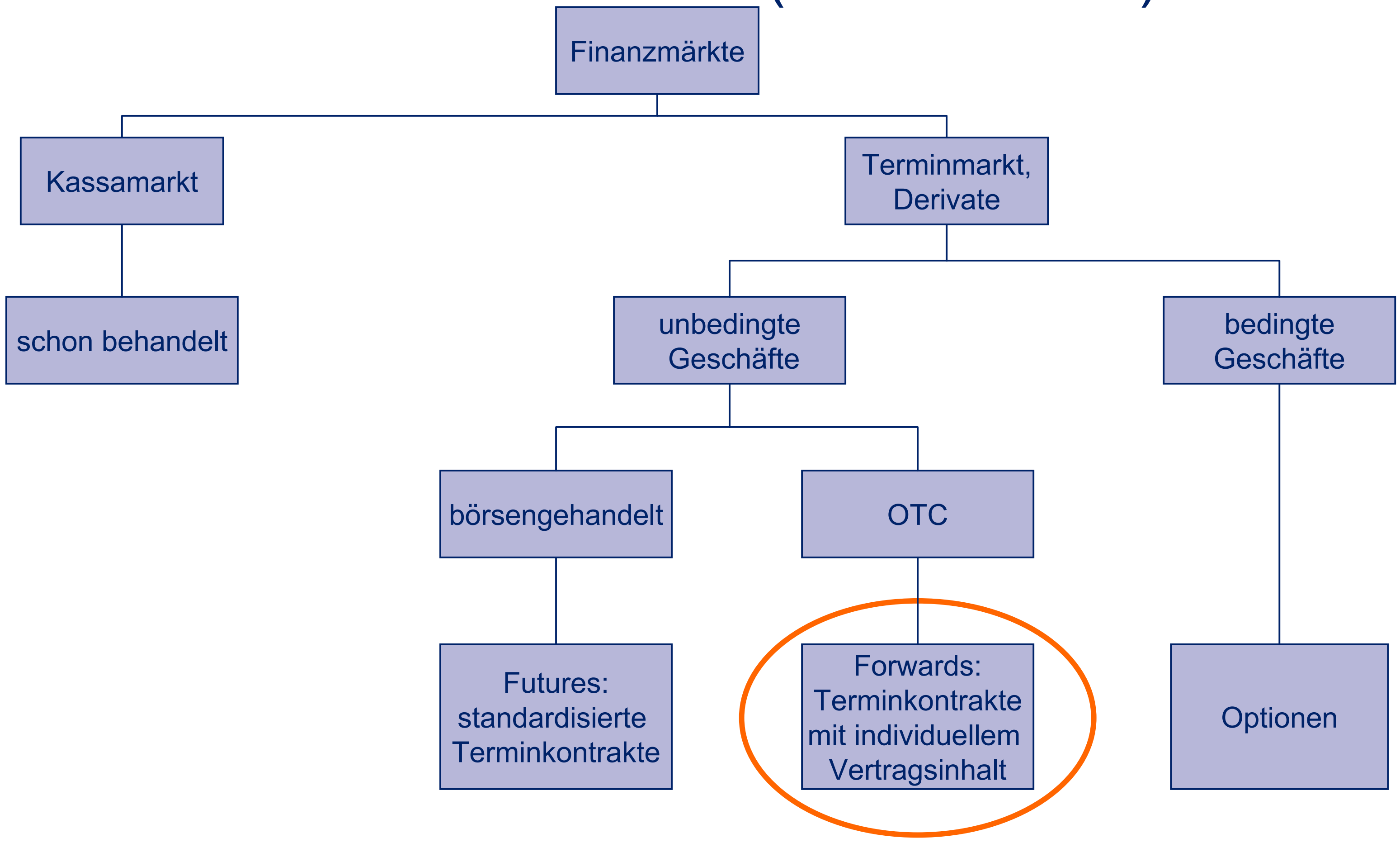
4 – Beispiel: Bewertung einer Anleihe

5 – Zinsstrukturkurven

6 – Termingeschäfte (Forwards, Futures)

7 – Anwendung: Bewertung eines „Floaters“

Überblick über Zinsinstrumente (Terminmarkt)



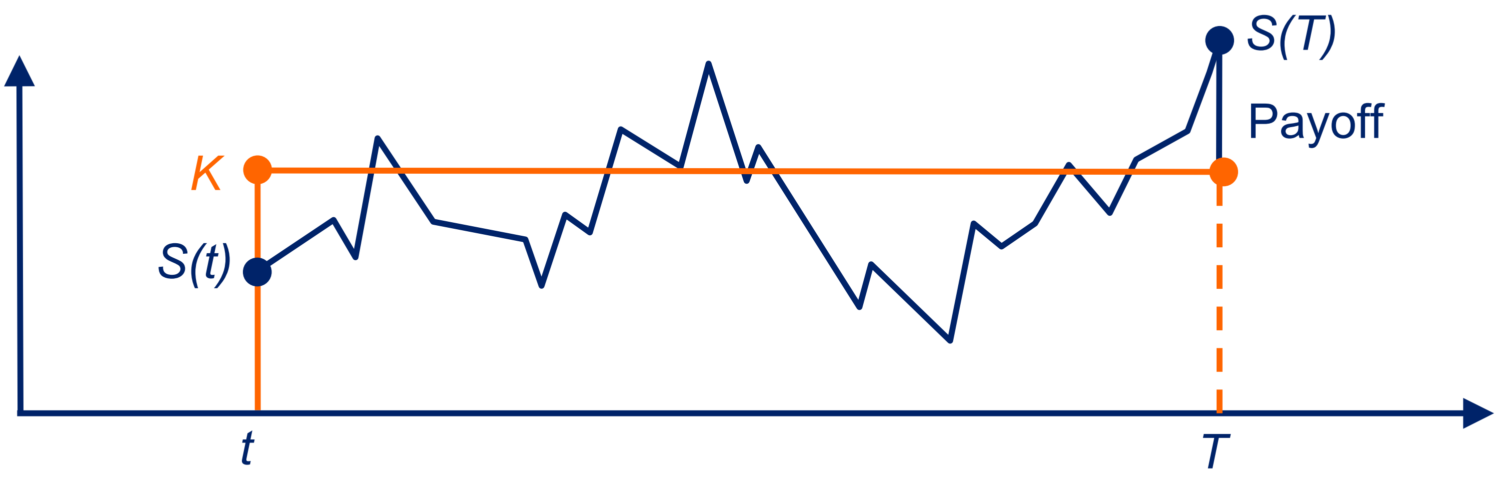
Finanzmärkte – Grundbegriffe III

- Termingeschäft: Vereinbarung für ein zukünftiges Geschäft
- Derivate: Termingeschäfte auf der Basis von Finanzinstrumenten (Underlyings)
- unbedingtes Geschäft: Geschäft mit definitiver Pflicht zur Vertragserfüllung, d. h. beide Kontraktparteien sind an die Erfüllung des Vertrages gebunden (Forwards, Futures)
- bedingtes Geschäft: Geschäft, das dem Halter das Recht, nicht aber die Pflicht zur Vertragsausübung gibt; der Stillhalter dagegen muss der Wahl des Halters nachkommen (Optionen)

Termingeschäfte (Forwards)

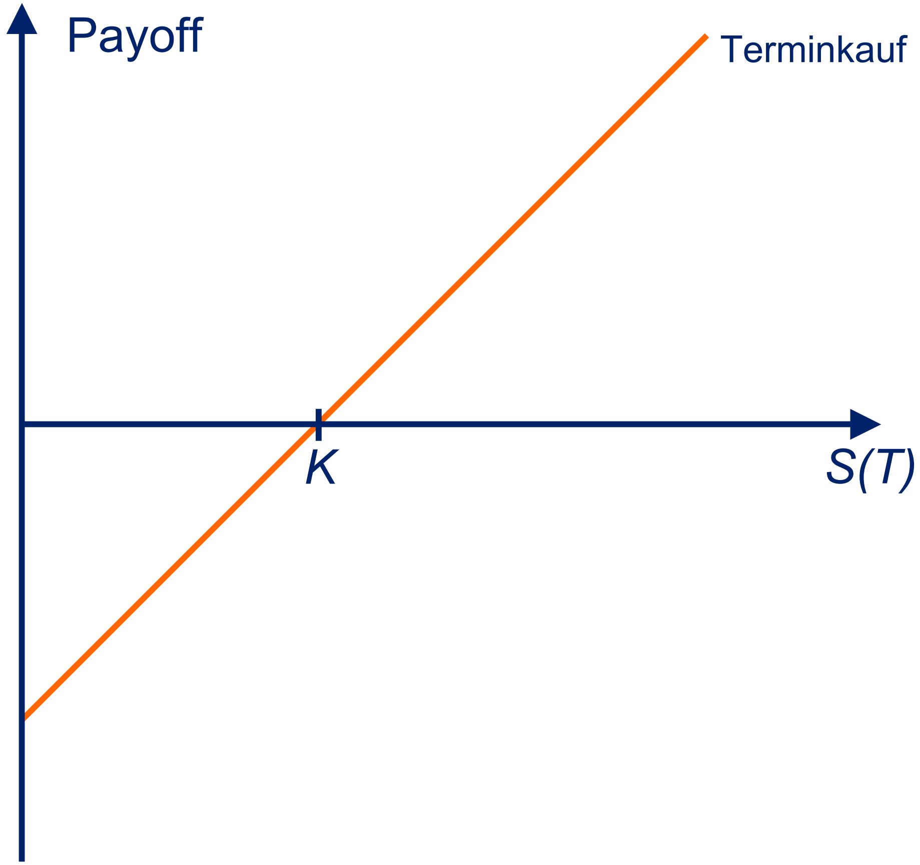
Definition:

Ein Forward Contract bezeichnet einen Vertrag, bei dem sich die beteiligten Kontrahenten zum aktuellen Zeitpunkt *t* ("heute") verpflichten, zu einem festgelegten zukünftigen Zeitpunkt (Fälligkeit) $T > t$ ein bestimmtes Underlying *S* zu einem bereits heute fest vereinbarten Preis *K* (Terminkurs) zu kaufen bzw. zu verkaufen.



Forward - Auszahlungsprofil Terminkauf

- unbegrenzte Gewinnchancen
- begrenztes Verlustrisiko
- Auszahlungsprofil (Payoff): *S(T)-K*

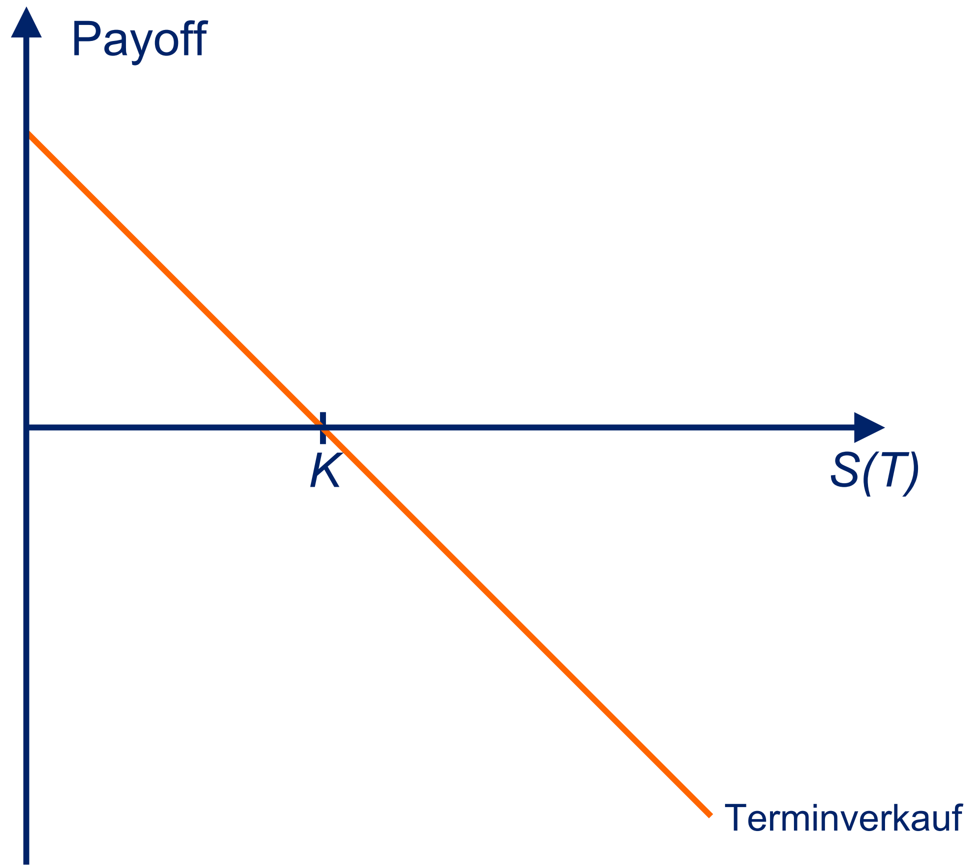


Forward - Auszahlungsprofil Terminverkauf

- begrenzte Gewinnchancen
- unbegrenztes Verlustrisiko
- Auszahlungsprofil (Payoff):

  $K\text{-}S(T) = -(S(T)-K)$,

  d.h. der Gewinn des Käufers ist gleich dem Verlust des Verkäufers und umgekehrt (Zero-Sum Game)



„No-Arbitrage"-Prinzip

Im folgenden soll der faire Wert des Termingeschäftes bzw. der faire Terminkurs bestimmt werden.

„Fair" bedeutet hier, dass kein Kontrahent die Möglichkeit eines risikolosen Gewinns hat, d.h. dass keine Arbitrage-Gelegenheit existiert.

Arbitrage: Ausnutzung komparativer Preisunterschiede; Realisierung risikoloser Gewinnmöglichkeiten.

Die meisten finanzmathematischen Modelle setzen voraus, dass im Markt keine Möglichkeit für Arbitrage existiert („No-Arbitrage-Argument"). Gäbe es sie, so würde sie unmittelbar von Arbitrageuren ausgenutzt werden, so dass die Märkte sich nach kurzer Zeit wieder im Gleichgewicht befänden.

Bewertung von Forward-Kontrakten

Das No-Arbitrage-Argument soll nun zur Bestimmung des Terminkurses verwendet werden:

Betrachte dazu zwei Portfolios:

- Portfolio A besteht aus einem Terminkontrakt zum Kauf des Underlyings *S* per Termin *T* zum Terminpreis *K* und aus Bargeld, das z.Zt. *T* gerade *K* entspricht
- Portfolio B besteht aus dem Underlying *S* (*S* zahlt keine Dividende)

Wertanalyse der Portfolios:

Sei $f_S(t,T,K)$ der Wert des Terminkontraktes. Dann gilt:

	Wert Zeit *t*	Wert Zeit *T*
Portfolio A	$f_S(t,T,K)+Z_r(t,T)K$	$S(T)-K+K=S(T)$
Portfolio B	$S(t)$	$S(T)$

d.h., die Portfolios haben zur Zeit *T* den gleichen Wert.

Bewertung von Forward-Kontrakten II

Solange keine Arbitrage-Möglichkeiten existieren (außerdem: kein Kontrahenten-risiko, Möglichkeit von Leerverkäufen), muss der Wert der beiden Portfolios auch zur Zeit *t* schon identisch sein.

Dann erhält man für den Wert des Terminkontraktes

$$\begin{aligned} f_S(t,T,K) &= S(t) - Z_r(t,T)K \\ &= Z_r(t,T)\big(S(t,T) - K\big) \end{aligned}$$

wobei $S(t,T) = Z_r^{-1}(t,T)S(t)$.

Bewertung von Forward-Kontrakten III

Damit gilt für den fairen Terminkurs (Forward-Preis), d.h. den vereinbarten Preis *K*, für den das Termingeschäft bei Vertragsabschluß den Wert Null hat:

$$K = S(t,T) = Z_r^{-1}(t,T)S(t)$$

d.h. der faire Terminkurs ist der mit dem risikolosen Zins aufgezinste aktuelle Kurs des Underlyings. Insbesondere ist er unabhängig von unserer Erwartung über den zukünftigen Kurs *S*(*T*) bei Fälligkeit!

Beispiel: Forward auf Zerobond

Betrachte einen Forward-Kontrakt zum Kauf eines Zerobonds mit Fälligkeit *T´* zum Zeitpunkt *T<T´*.

Der aktuelle Spotpreis ist gegeben durch $S(t) = Z_r(t, T')$. Da ein Zerobond vor Fälligkeit keine Zinsen zahlt, gilt für den Terminkurs:

$$S(t,T) = Z_r^{-1}(t,T)S(t) = \frac{Z_r(t,T')}{Z_r(t,T)} \equiv Z_r(T,T'|t)$$

Verallgemeinerter Diskontfaktor

Zinsrate von *T* bis *T´* (Forward-Rate)

Beginn Zinsperiode

Ende Zinsperiode

Zeitpunkt der Zinsvereinbarung

Forward Rates

betrachte nochmals den gleichen Zeitraum:

sowie die folgenden zwei Geldanlagestrategien:

– direkte Anlage von *t* bis *T´*
– Anlage zunächst von *t* bis *T;* anschließend den dann aktuellen Betrag von *T* bis *T´*

<u>Frage:</u>

Wie hoch ist der faire Zinssatz für die zukünftige Periode aus heutiger Sicht, d.h. die Forward-Rate von *T* bis *T´*, die mit den aktuellen Spot-Rates konsistent ist?

Forward Rates II

Das No-Arbitrage-Argument liefert:

$$Z_r^{-1}(t,T') = Z_r^{-1}(t,T) \cdot Z_r^{-1}(T,T' \mid t)$$

Forward Rate

d.h. der Terminkurs zum Kauf eines Zerobonds mit Fälligkeit *T´* per Termin *T* ist gleich dem Preis, den der Zerobond zur Zeit *T* hätte, wenn die aktuell gültige Forward-Rate die zur Zeit *T* realisierte Spot-Rate wäre.

Forward Rates III

Mit der Annahme stetiger Verzinsung erhält man aus

$$Z_r(t,T) = \exp[-r(T-t)\cdot(T-t)]$$

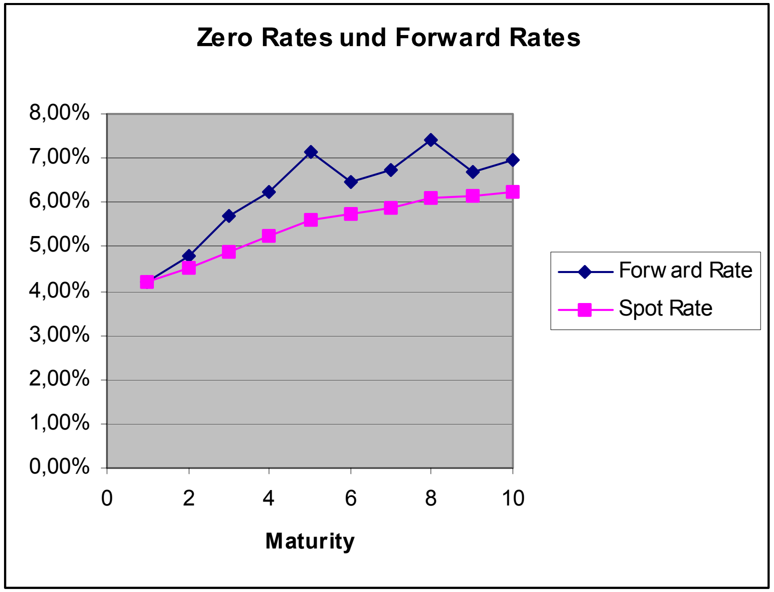
das Resultat für die Forward-Rate:

$$r(T,T' \mid t) = \frac{r(T'-t)\cdot(T'-t) - r(T-t)\cdot(T-t)}{T'-T}$$

Forward Rates: Beispiel

Forward Rates für einjährige zukünftige Zinsperiode, $T'-T$ = 1Y

Maturity	Restlaufzeit	Spot Rate	Diskontfaktor	Forward Rate
1Y	365	4,20%	0,9589	4,20%
2Y	730	4,50%	0,9139	4,80%
3Y	1095	4,90%	0,8633	5,70%
4Y	1460	5,23%	0,8112	6,22%
5Y	1825	5,61%	0,7554	7,13%
6Y	2190	5,75%	0,7082	6,45%
7Y	2555	5,89%	0,6621	6,73%
8Y	2920	6,08%	0,6148	7,41%
9Y	3285	6,15%	0,5749	6,71%
10Y	3650	6,23%	0,5363	6,95%



Termingeschäfte (Futures)

Definition:

Ein Future-Contract ist, ähnlich dem Forward-Contract, ein unbedingtes Termingeschäft. Im Gegensatz zu Forwards sind Futures standardisierte Geschäfte, die an Terminbörsen gehandelt werden. Insbesondere tritt die Börse als Kontrahent auf, und ein Gewinn oder Verlust wird nicht erst bei Fälligkeit realisiert, sondern täglich über ein Margin-Konto ausgeglichen („daily settlement").

Aufgrund der täglichen Ausgleichszahlungen tritt ein durch veränderte Terminpreise resultierender Cashflow nicht erst zur Fälligkeit *T*, sondern sofort auf. Daher wird dieser Cashflow – im Gegensatz zum Forward – nicht abgezinst und der Wert der Future-Position ergibt sich zu

$$f_S(t,T,K) = S(t,T) - K$$

wobei *S(t,T)* wieder den Forward-Preis bezeichnet (für nicht-stochastische Zinsen gleich dem Terminpreis für Futures).

Inhalt

1 – Einführung: d-fine GmbH, Übersicht der Vorlesungsreihe
2 – Zinsen
3 – Überblick über Zinsinstrumente
4 – Beispiel: Bewertung einer Anleihe
5 – Zinsstrukturkurven
6 – Termingeschäfte (Forwards, Futures)
7 – Anwendung: Bewertung eines „Floaters“

Bewertung eines „Floaters“

Floating Rate Note: Anleihe mit variablem Zinssatz

Zins wird in regelmäßigen Abständen für die jeweils folgende Zinsperiode an den Marktzins angepasst, z.B. 3M LIBOR (London Inter Bank Offered Rate)

t_{i-1} : Zeitpunkt der Zinsanpassung für die Zinszahlung bei t_i

Zukünftige Zinssätze sind nicht bekannt. Wie erfolgt Bewertung ?

Bewertung eines „Floaters“ II

Summe der diskontierten zukünftigen Cashflows:

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n} Z_{r(t,t_i)}(t,t_i)\left(Z^{-1}_{r(t_{i-1},t_i)}(t_{i-1},t_i) - 1\right)N + Z_{r(t,t_n)}(t,t_n)N$$

$r(t_{i-1},t_i)$ ist der zum zukünftigen Zeitpunkt t_{i-1} für die Periode (t_{i-1},t_i) realisierte Referenzzinssatz

Martingaltheorem

Sind *A(t)* und *B(t)* die Preise zweier handelbarer Finanzinstrumente, so lässt sich in einem arbitrage-freien Markt ein Wahrscheinlichkeitsmaß angeben, für das gilt:

$$\mathrm{E}_t\left[\frac{A(T)}{B(T)}\right]=\frac{A(t)}{B(t)}$$

d.h. es gibt eine Strategie von Sicherungsgeschäften („Hedging“), die den Wert von *A* (gemessen in Einheiten von *B*) im Mittel konstant hält.

Bewertung eines „Floaters" III

Mit *A(t)=Z(t,T)* und *B(t)=Z(t,T´)*, wobei *t<T<T´*, als den Preisen von (handelbaren) Zero Bonds erhält man (im „terminpreis-neutralen Maß"):

$$\mathrm{E}_t\left[\frac{1}{Z(T,T')}\right]=\frac{Z(t,T)}{Z(t,T')}=\frac{1}{Z(T,T'\,|\,t)}$$

Damit:

$$V(t)=Z_{r(t,t_1)}(t,t_1)r_0N+\sum_{i=2}^{n}Z_{r(t,t_i)}(t,t_i)\left(Z_r^{-1}(t_{i-1},t_i\,|\,t)-1\right)N$$
$$+Z_{r(t,t_n)}(t,t_n)N$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem für nicht-stochastische Zinsen überein.

Bewertung eines „Floaters“ IV

Mit dem Ergebnis für die Forward Rates:

$$V(t) = Z_{r(t,t_1)}(t,t_1) r_0 N + \sum_{i=2}^{n} \left(Z_{r(t,t_{i-1})}(t,t_{i-1}) - Z_{r(t,t_i)}(t,t_i) \right) N + Z_{r(t,t_n)}(t,t_n) N$$

Nach Ausführen der Summation („Teleskopsumme“) ergibt sich:

$$V(t) = Z_{r(t,t_1)}(t,t_1)(1 + r_0) N$$

Der Wert eines Floaters ist also gerade so groß, als ob am nächstfolgenden Zinstermin das Nominal sowie der zuletzt gefixte Zins gezahlt würde.

deepest understanding finest consulting

deepest understanding finest consulting

Skripten zur Vorlesungsreihe „Econophysics“:

www.d-fine.de