



Econophysics

Vorlesungsreihe im Rahmen der IX. Heidelberger Graduiertenkurse
Physik an der Universität Heidelberg

Dr. Jörn Rank

08. Oktober 2002

Vorlesung 2:

Stochastische Prozesse und Black-Scholes Gleichung

Inhalt

- 1 **Stochastische Prozesse**
- 2 Itô Integral und stochastische Differentialgleichungen
- 3 Vom Random Walk zur Brownschen Bewegung

- 4 Die Annahmen im Black-Scholes Modell
- 5 Herleitung der Black-Scholes Gleichung
- 6 Allgemeine Lösung der B.-S. Gleichung für europäische Optionen

- 7 Die Put-Call Parität
- 8 Analytische Bewertung einiger europäischer Optionen

- 9 Binomialbaum Methode
- 10 Weitere Finite Differenzen Methoden: Explizit, implizit, Crank-Nicolson
- 11 Vergleich der Finiten Differenzen Methoden und weitere Verfahren

Wahrscheinlichkeitsaxiome nach Kolmogorov (1)

Definition (Teil 1):

Gegeben sei eine Menge Ω , die sog. **Ergebnismenge** oder der **Grundraum**.

Ein System F von Teilmengen von Ω mit den Eigenschaften

$$(I) \quad \Omega \in F$$

$$(II) \quad A \in F \Rightarrow A^c \in F \text{ mit } A^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$$

$$(III) \quad A_1, A_2, \dots \in F \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$$

heißt **Ereignisfeld** oder **σ -Algebra** in Ω . Die Elemente von F heißen **Ereignisse**.

Wahrscheinlichkeitsaxiome nach Kolmogorov (2)

Definition (Teil 2):

Eine Abbildung $P: \begin{matrix} F \rightarrow [0,1] \\ A \mapsto P(A) \end{matrix}$ mit den Eigenschaften

$$(IV) \quad P(\Omega) = 1$$

$$(V) \quad P(A) \geq 0 \quad \forall A \in F$$

$$(VI) \quad \text{für paarweise disjunkte Ereignisse } A_1, A_2, \dots \in F \text{ gilt } P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß** (W-Maß) auf (Ω, F) .

Die gesamte Struktur (Ω, F, P) wird als **allgemeiner Wahrscheinlichkeitsraum** oder **Basismodell** bezeichnet.

Zufallsvariablen (1)

Definition:

Eine Variable, die in Abhängigkeit zufälliger Ergebnisse reelle Werte annimmt, heißt **Zufallsvariable**.

M.a.W.: Eine Zufallsvariable \underline{x} ist eine F -messbare Abbildung $\underline{x}: \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$,
 $\omega \mapsto \underline{x}(\omega)$,
d.h. $\{\omega \in \Omega \mid \underline{x}(\omega) \in A\} \in F$ für alle offenen $A \subset \mathfrak{R}$.

Beispiele:

- Kopf (= 1) oder Zahl (= 0) beim Münzwurf
- Anzahl der in einer bestimmten Zeit zerfallenen Atome einer radioaktiven Substanz
- Kurse von Aktien u.ä.

Zufallsvariablen (2)

Bemerkung:

Eine Zufallsvariable \underline{x} definiert in Verbindung mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß P ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P_{\underline{x}}$ auf \mathfrak{R} (genauer: auf $(\mathfrak{R}, \text{Bor}(\mathfrak{R}))$), indem man

$$P_{\underline{x}}(B) \equiv P(\underline{x} \in B) \text{ für } B \subseteq \mathfrak{R}$$

setzt (genauer: für $B \in \text{Bor}(\mathfrak{R})$).

Mit $\text{Bor}(\mathfrak{R})$ ist die Borel-Algebra von \mathfrak{R} gemeint, d.h. die kleinste Ereignisalgebra, welche alle offenen Teilmengen $A \subset \mathfrak{R}$ enthält.

Zur Notation:

- $\underline{x} \in B$ bedeutet $\{\omega \in \Omega \mid \underline{x}(\omega) \in B\}$.
Analog: $(a < \underline{x} \leq b)$ bedeutet $\{\omega \in \Omega \mid a < \underline{x}(\omega) \leq b\}$ usw.
- Im folgenden wird stets die Kurzschreibweise \underline{x} für $\underline{x}(\omega)$ benutzt.

Stochastische Prozesse

Definition:

Eine Zufallsvariable \underline{x} , die für jede Zeitstelle t eines Zeitraumes τ einen zufälligen Wert annimmt, heißt **stochastischer Prozess**, $\underline{x} = (\underline{x}_t)_{t \in \tau}$.

Wenn zur Zeit t der Zustand (das Ergebnis) $\omega \in \Omega$ vorliegt, wird der Wert des stochastische Prozesses bezeichnet mit $\underline{x}(t, \omega)$.

M.a.W.: Ein stochastischer Prozess \underline{x} ist eine Abbildung $\underline{x}: \begin{matrix} \tau \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R} \\ t, \omega \mapsto \underline{x}(t, \omega) \end{matrix}$.

Definition:

Ein stochastischer Prozess $(\underline{x}_t)_{t \in \tau}$ heißt **diskret** bzw. **kontinuierlich**, wenn die Zeitmenge τ diskret bzw. kontinuierlich ist.

Bemerkung:

Analog der Bezeichnung bei Zufallsvariablen benutzen wir im folgenden für den Ausdruck $\underline{x}(t, \omega) = a$ die Abkürzung $\underline{x}(t) = a$.

Markov Prozesse

Definition:

Ein stochastischer Prozess $\underline{x} = (\underline{x}_t)_{t \in \tau}$ heißt **Markov Prozess**, wenn

$$P(\underline{x}(t) \in A \mid \underline{x}(t_1) = x_1, \dots, \underline{x}(t_n) = x_n) = P(\underline{x}(t) \in A \mid \underline{x}(t_n) = x_n)$$

für alle $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{X}$, alle $t_1, \dots, t_n, t \in \tau$ mit $t_1 < \dots < t_n < t$ und alle offenen $A \subset \mathfrak{X}$.

Interpretation:

Ein Markov Prozess hat **kein Gedächtnis**, d.h. jede weitere Entwicklung des Prozesses hängt jeweils nur von dessen aktuellen Wert und nicht auch von den Vorgängerwerten ab.

Pfad eines stochastischen Prozesses

Definition:

Wenn der stochastische Prozess $(\underline{x}_t)_{t \in \tau}$ kontinuierlich ist, definiert die zufällige Abbildung $t \rightarrow \underline{x}(t)$ den **Pfad** des stochastischen Prozesses.

Wenn der stochastische Prozess $(\underline{x}_t)_{t \in \tau}$ diskret ist, ist der Pfad durch die lineare Interpolation der Punkte $(t, \underline{x}(t))$ gegeben.

Brownsche Bewegung

Definition:

Sei $\underline{W} = (\underline{W}_t)_{t \in \tau}$ ein kontinuierlicher stochastischer Prozess mit $\tau = [t_0, \infty)$ oder $\tau = [t_0, t_e]$. \underline{W} heißt **Brownsche Bewegung** oder **Standard Wiener Prozess**, wenn gilt:

- (I) $\underline{W}_{t_0} = 0$, d.h. \underline{W} startet im Zeitpunkt t_0 in 0.
- (II) Der Zuwachs $\underline{W}_t - \underline{W}_s$ für $s < t$ ist $N(0, t-s)$ -verteilt.
- (III) Die Zuwächse von \underline{W} sind unabhängig, d.h. für $s < t < u$ sind die Zufallsvariablen $\underline{W}_t - \underline{W}_s$ und $\underline{W}_u - \underline{W}_t$ unabhängig.
- (IV) Die Pfade von \underline{W} sind fast sicher stetig, d.h. $\{\omega \in \Omega \mid \underline{x}(\omega) : \tau \rightarrow \mathfrak{R} \text{ ist unstetig}\}$ ist eine Nullmenge.

Bemerkungen zur Brownschen Bewegung

- Man kann zeigen, dass die Pfade eines Standard Wiener Prozesses mit Wahrscheinlichkeit 1 nirgends differenzierbar sind.
- Wegen Eigenschaft (III) hat ein Wiener Prozess die Markov Eigenschaft.
- $\text{Cov}(\underline{W}_s, \underline{W}_t) = \min(s, t)$

Allgemeine Brownsche Bewegung

Definition:

Sei \underline{W} ein Standard Wiener Prozess. Der **allgemeine Wiener Prozess** oder die **allgemeine Brownsche Bewegung** mit Start in X_{t_0} , Driftterm $\mu(t - t_0)$ und Varianzterm σ^2 ist definiert durch $\underline{X}_t = X_{t_0} + \mu(t - t_0) + \sigma \underline{W}_t$.

Bemerkungen:

- $E(\underline{X}_t) = X_{t_0} + \mu(t - t_0)$
- $\text{Var}(\underline{X}_t) = \sigma^2(t - t_0)$

Inhalt

- 1 Stochastische Prozesse
- 2 **Itô Integral und stochastische Differentialgleichungen**
- 3 Vom Random Walk zur Brownschen Bewegung

- 4 Die Annahmen im Black-Scholes Modell
- 5 Herleitung der Black-Scholes Gleichung
- 6 Allgemeine Lösung der B.-S. Gleichung für europäische Optionen

- 7 Die Put-Call Parität
- 8 Analytische Bewertung einiger europäischer Optionen

- 9 Binomialbaum Methode
- 10 Weitere Finite Differenzen Methoden: Explizit, implizit, Crank-Nicolson
- 11 Vergleich der Finiten Differenzen Methoden und weitere Verfahren

Nicht antizipierende Prozesse

Definition:

Gegeben seien ein Standard Wiener Prozess $(\underline{W}_t)_{t \geq 0}$ sowie ein weiterer, kontinuierlicher, stochastischer Prozess $(\underline{Y}_t)_{t \geq 0}$. Dann heißt $(\underline{Y}_t)_{t \geq 0}$ **nicht antizipierend** oder **adaptiert**, wenn für jede Zeit $s \geq 0$ die Zufallsvariable \underline{Y}_s messbar bzgl. jener Ereignisalgebra ist, welche von $(\underline{W}_t)_{0 \leq t \leq s}$ erzeugt wird.

Folgerung:

Wenn $(\underline{Y}_t)_{t \geq 0}$ nicht antizipierend ist, dann sind die stochastischen Prozesse \underline{Y}_s und $\underline{W}_t - \underline{W}_s$ unabhängig für alle $t > s$.

Itô Integral

Definition:

Das **Itô Integral** eines nicht antizipierenden Prozesses $(\underline{Y}_t)_{t \geq 0}$ bzgl. des Standard Wiener Prozesses $(\underline{W}_t)_{t \geq 0}$ ist definiert als

$$\int_0^t Y_s dW_s \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} I_n \text{ mit}$$
$$I_n = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_{(k-1)\Delta t} (\underline{W}_{k\Delta t} - \underline{W}_{(k-1)\Delta t}) \text{ und } \Delta t = \frac{t}{n} .$$

Bemerkungen zum Itô Integral

- Die Schreibweise $\int_0^t Y_s dW_s \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ bedeutet $\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\int_0^t Y_s dW_s - I_n \right)^2 \right] = 0$.
- Bei der Summenbildung $\sum_{k=1}^n Y_{(k-1)\Delta t} (W_{k\Delta t} - W_{(k-1)\Delta t})$ wird stets der Wert des zu integrierenden Prozesses am linken Rand des Zeitintervalls $[(k-1)\Delta t, k\Delta t]$ genommen. Würde der Wert an einer anderen Stelle des Zeitintervalls genommen werden, wäre i.a. der Wert des Itô Integrals unterschiedlich. (Vgl. mit Riemannschem Integral hält also nur sehr bedingt!)
- In der Finanzmathematik muss das Itô Integral für Prozesse verallgemeinert werden, für die der obige Erwartungswert nicht existiert.

Itô Integral des Standard Wiener Prozesses

Bemerkung:

Itô Integration eines Standard Wiener Prozesses $(W_t)_{t \geq 0}$ bzgl. sich selbst liefert als Ergebnis (s. z.B. Franke et al.)

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2} (W_t^2 - W_0^2) - \frac{t}{2} = \frac{W_t^2}{2} - \frac{t}{2} .$$

Zusatzterm

Beachte:

Beim Lebesgue-Stieltjes Integral gilt für eine glatte Funktion f

$$\int_0^t f(s) df(s) = \frac{1}{2} (f^2(t) - f^2(0)) .$$

Grund für den Zusatzterm beim Itô Integral:

Für $\Delta t \rightarrow 0$ sind beim Standard Wiener Prozess die lokalen Zuwächse während Δt von $O(\sqrt{\Delta t})$, während die Zuwächse für f von $O(\Delta t)$ (Satz von Taylor) und somit wesentlich kleiner sind.

„Definition“ einer stochastischen DGL

Der allgemeine Wiener Prozess mit Start bei X_{t_0} ist gegeben durch

$$\underline{X}_t = X_{t_0} + \mu(t - t_0) + \sigma \underline{W}_t .$$

Für ein Zeitintervall Δt folgt

$$\underline{X}_{t+\Delta t} - \underline{X}_t = \mu \Delta t + \sigma (\underline{W}_{t+\Delta t} - \underline{W}_t) .$$

Für $\Delta t \rightarrow 0$ benutzt man die Schreibweise

$$\boxed{dX_t = \mu dt + \sigma dW_t}$$

Die mathematische Bedeutung des letzten Ausdruckes - einer sog. **stochastischen Differentialgleichung** - ist gegeben über das Itô Integral

$$X_t - X_{t_0} = \int_{t_0}^t \mu ds + \int_{t_0}^t \sigma dW_s .$$

Diffusionsprozess

Definition:

Seien $(\underline{a}_t)_{t \geq 0}$ und $(\underline{b}_t)_{t \geq 0}$ nicht antizipierende Prozesse. Ein stochastischer Prozess $(\underline{X}_t)_{t \geq 0}$, welcher der stochastischen Differentialgleichung

$$d\underline{X}_t = \underline{a}_t dt + \underline{b}_t dW_t$$

genügt, heißt **Diffusionsprozess** oder **Itô Prozess**.

M.a.W.:

$(\underline{X}_t)_{t \geq 0}$ ist Lösung der Integralgleichung $X_t - X_{t_0} = \int_{t_0}^t \underline{a}_s ds + \int_{t_0}^t \underline{b}_s dW_s$.

Beispiel:

$$\underline{a}_t = A(t, \underline{X}_t), \quad \underline{b}_t = B(t, \underline{X}_t)$$

Beispiele von Diffusionsprozessen

- $a_t = 0, b_t = 1 \Rightarrow X_t$ ist Brownsche Bewegung
- $a_t = \mu, b_t = \sigma \Rightarrow X_t$ ist Wiener Prozess

Definition:

Ein Diffusionsprozess mit $a_t = \mu S_t$ und $b_t = \sigma S_t$ heißt **geometrische Brownsche**

Bewegung:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW \\ \Rightarrow \frac{dS_t}{S_t} &= \mu dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

Itô's Lemma

Satz:

Gegeben sei ein Diffusionsprozess $dX_t = a_t dt + b_t dW_t$ sowie eine Funktion $V = V(t, X_t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}dV(t, X_t) &= \left(\frac{\partial V}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} b^2(t, X_t) \frac{\partial^2 V}{\partial X^2}(t, X_t) \right) dt + \frac{\partial V}{\partial X}(t, X_t) dX_t \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t}(t, X_t) + a(t, X_t) \frac{\partial V}{\partial X}(t, X_t) + \frac{1}{2} b^2(t, X_t) \frac{\partial^2 V}{\partial X^2}(t, X_t) \right) dt + \\ &\quad b(t, X_t) \frac{\partial V}{\partial X}(t, X_t) dW_t \\ &= \tilde{a}(t, X_t) dt + \tilde{b}(t, X_t) dW_t\end{aligned}$$

Bemerkungen zu Itô's Lemma

- $V(t, X_t)$ ist selbst ein Diffusionsprozess.
- Zur heuristischen Herleitung von Itô's Lemma benutze den Satz von Taylor sowie $\lim_{dt \rightarrow 0} (dW_t)^2 = dt$.

Lösung der geometrischen Brownschen Bewegung (1)

Als Anwendung von Itô's Lemma betrachten wir den Logarithmus der geometrischen Brownschen Bewegung: $Y(t, S_t) = \log S_t$ mit $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$.

Es folgt:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$$

Ferner:

$$a = \mu S, \quad b^2 = \sigma^2 S^2$$

Zusammen folgt:

$$dY = \left(0 + \frac{1}{S} \mu S + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \left(-\frac{1}{S^2} \right) \right) dt + \sigma S \frac{1}{S} dW = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW$$

Lösung der geometrischen Brownschen Bewegung (2)

Wegen $dY = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW$ ist $Y_t = \log S_t$ selbst ein Wiener Prozess mit

Erwartungswert $Y_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - t_0)$ und Varianz $\sigma^2(t - t_0)$, d.h. Y_t lässt sich

schreiben als $Y_t = Y_{t_0} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - t_0) + \sigma W_t$.

Für S_t folgt:

$$S_t = S_{t_0} \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - t_0) + \sigma W_t\right\} \text{ mit } e^{Y_{t_0}} = S_{t_0}$$

Bemerkungen zur geometrischen Brownschen Bewegung

- Die geometrische Brownsche Bewegung kann durch den geometrischen Random Walk approximiert werden (siehe unten).
- Für positives S_{t_0} nimmt die geometrische Brownsche Bewegung nur positive Werte an.
- Wegen $S_t \sim \exp(W_t)$ ist S_t lognormalverteilt.
- Die geometrische Brownsche Bewegung wird häufig benutzt, um die Entwicklung von Finanzkursen zu modellieren.

Inhalt

- 1 Stochastische Prozesse
- 2 Itô Integral und stochastische Differentialgleichungen
- 3 **Vom Random Walk zur Brownschen Bewegung**

- 4 Die Annahmen im Black-Scholes Modell
- 5 Herleitung der Black-Scholes Gleichung
- 6 Allgemeine Lösung der B.-S. Gleichung für europäische Optionen

- 7 Die Put-Call Parität
- 8 Analytische Bewertung einiger europäischer Optionen

- 9 Binomialbaum Methode
- 10 Weitere Finite Differenzen Methoden: Explizit, implizit, Crank-Nicolson
- 11 Vergleich der Finiten Differenzen Methoden und weitere Verfahren

Random Walk

Definition:

Sei $\tau = \{t_0, t_1, t_2, \dots\}$ eine diskrete Zeitmenge mit äquidistanten Abständen, d.h. $t_n = t_0 + n \Delta t$ für ein festes Zeitintervall Δt . Seien $a, b, u, d \in \mathfrak{R}$ mit $a > 0$ und $b < 0$ bzw. $u > 1$ und $d < 1$. Es seien ferner $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots$ und $\underline{z}_1, \underline{z}_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen mit den W-Maßen

$$\begin{aligned} P(\underline{y}_k = a) = p \quad \text{und} \quad P(\underline{y}_k = b) = 1 - p \\ P(\underline{z}_k = u) = p \quad \text{und} \quad P(\underline{z}_k = d) = 1 - p \end{aligned} \quad \text{für } k = 1, 2, \dots .$$

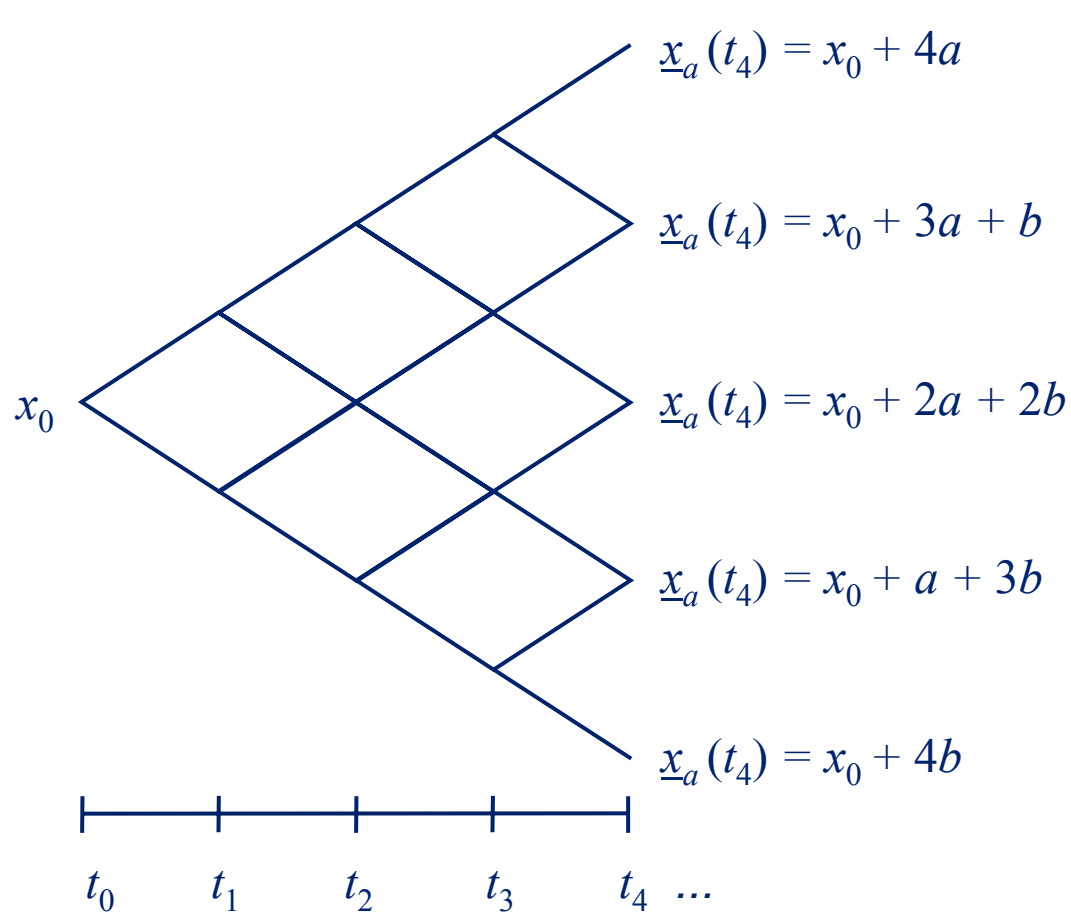
Betrachte für einen festen Startwert x_0 die diskreten stochastischen Prozesse

$$\begin{aligned} \underline{x}_a(t_n) &\equiv x_0 + \sum_{k=1}^n \underline{y}_k \quad \text{für } n = 1, 2, \dots . \\ \underline{x}_g(t_n) &\equiv x_0 \prod_{k=1}^n \underline{z}_k \end{aligned}$$

\underline{x}_a heißt **arithmetischer Random Walk**, \underline{x}_g heißt **geometrischer Random Walk**.

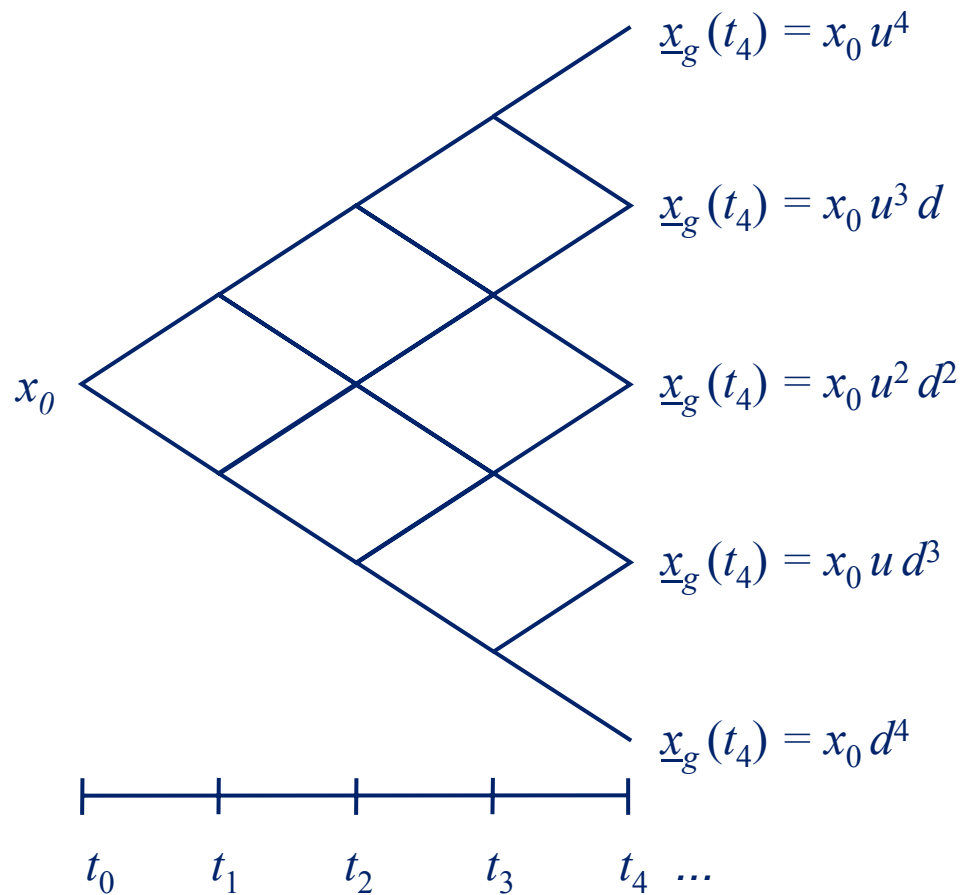
Pfade des arithmetischen Random Walks

$$\underline{x}_a(t_n) \equiv x_0 + \sum_{k=1}^n y_{-k}$$



Pfade des geometrischen Random Walks

$$\underline{x}_g(t_n) \equiv x_0 \prod_{k=1}^n \underline{z}_k$$



Bemerkungen zum Random Walk (1)

- Sowohl der arithmetische Random Walk als auch der geometrische Random Walk sind Markov Prozesse.
- Aus dem zentralen Grenzwertsatz folgt, dass $\underline{x}_a(t_n)$ für $n \rightarrow \infty$ normalverteilt ist.
- Der arithmetische Random Walk kann sowohl positive als auch negative Werte annehmen.

Falls für den Startwert $x_0 > 0$ gilt, bleibt der geometrische Random Walk stets positiv.

⇒ Zur Modellierung von Finanzkursen eignet sich nur der geometrische Random Walk.

Bemerkungen zum Random Walk (2)

- Durch Logarithmieren kann man einen geometrischen Random Walk in einen arithmetischen Random Walk überführen:

$$\log(\underline{x}_g(t_n)) \equiv \log(x_0) + \sum_{k=1}^n \log(\underline{y}_k)$$

- Für $n \rightarrow \infty$ ist $\log(\underline{x}_g(t_n))$ normalverteilt, d.h. $\underline{x}_g(t_n)$ ist lognormalverteilt.

Vom Random Walk zur Brownschen Bewegung (1)

Ausgangssituation:

Betrachte wiederum die o.a. arithmetischen und geometrischen Random Walks auf der diskreten Zeitmenge $\tau = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$.

Lösung:

Durch „geschickte“ Wahl der Wahrscheinlichkeit p , der Parameter a , b , u und d und unter Ausnutzung des zentralen Grenzwertsatzes ist es möglich, im Limes $n \rightarrow \infty$ bzw. $\Delta t \rightarrow 0$ mit $n \Delta t = t_n - t_0 = \text{const.}$

- aus dem arithmetischen Random Walk die Brownschen Bewegung und
- aus dem geometrischen Random Walk die geometrische Brownschen Bewegung zu erhalten.

Vom Random Walk zur Brownschen Bewegung (2)

Arithmetischen Random Walk → Brownschen Bewegung:

$$a = \sqrt{\Delta t}, \quad b = -\sqrt{\Delta t}, \quad p = \frac{1}{2}, \quad \text{also } P(\underline{y}_k = +\sqrt{\Delta t}) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P(\underline{y}_k = -\sqrt{\Delta t}) = \frac{1}{2}$$

Geometrischer Random Walk → geometrische Brownschen Bewegung:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad p = \frac{e^{\mu\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}},$$

$$\text{also } P(\underline{z}_k = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}) = \frac{e^{\mu\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} \quad \text{und} \quad P(\underline{z}_k = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}) = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{\mu\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$

Diskrete vs. kontinuierliche Prozesse

- Finanzkurse sind eigentlich Prozesse in diskreter Zeit.
- Da man mit kontinuierlichen stochastischen Prozessen einfacher als mit diskreten stochastischen Prozessen rechnen kann, wird das Verhalten von Finanzkursen häufig in stetiger Zeit approximiert. Dies ist insbesondere zur Herleitung der Black-Scholes Formel notwendig, die als Voraussetzung eine geometrische Brownsche Bewegung des Underlying Kurses erfordert.
- Umgekehrt zeigt die Konstruktion der geometrischen Brownschen Bewegung aus dem geometrischen Random Walk, wie man in numerischen Algorithmen einen kontinuierlichen stochastischen Prozess durch einen diskreten stochastischen Prozess approximieren kann.

Inhalt

- 1 Stochastische Prozesse
- 2 Itô Integral und stochastische Differentialgleichungen
- 3 Vom Random Walk zur Brownschen Bewegung

- 4 **Die Annahmen im Black-Scholes Modell**
- 5 Herleitung der Black-Scholes Gleichung
- 6 Allgemeine Lösung der B.-S. Gleichung für europäische Optionen

- 7 Die Put-Call Parität
- 8 Analytische Bewertung einiger europäischer Optionen

- 9 Binomialbaum Methode
- 10 Weitere Finite Differenzen Methoden: Explizit, implizit, Crank-Nicolson
- 11 Vergleich der Finiten Differenzen Methoden und weitere Verfahren

Grundlagen

Definition:

Eine **Call Option** bezeichnet einen Vertrag zwischen zwei Parteien, bei dem der Käufer zu einem Zeitpunkt t durch die Zahlung der Optionsprämie das Recht erwirbt, zu einem festgelegten zukünftigen Zeitpunkt $T > t$ (**europäische** Option) oder während eines in der Zukunft liegenden Zeitraumes (**amerikanische** Option) das Underlying zu einem zur Zeit t vereinbarten Preis K zu kaufen.

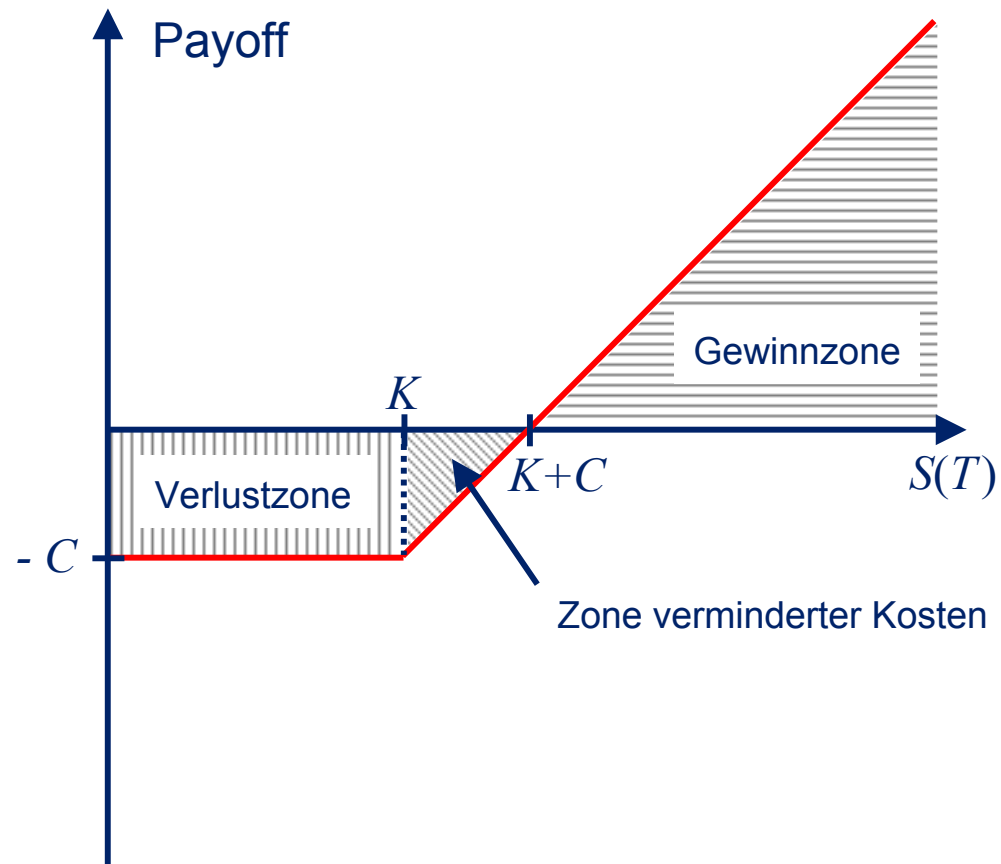
Ziel:

Herleitung einer Gleichung, dessen Lösung (analytisch oder numerisch) den Wert der Option beschreibt.

Gewinn/Verlust Diagramm Plain Vanilla Call Opt. (Long)

C = Optionsprämie

$K + C$ = Break-even Kurs



Wertkomponenten

Definition:

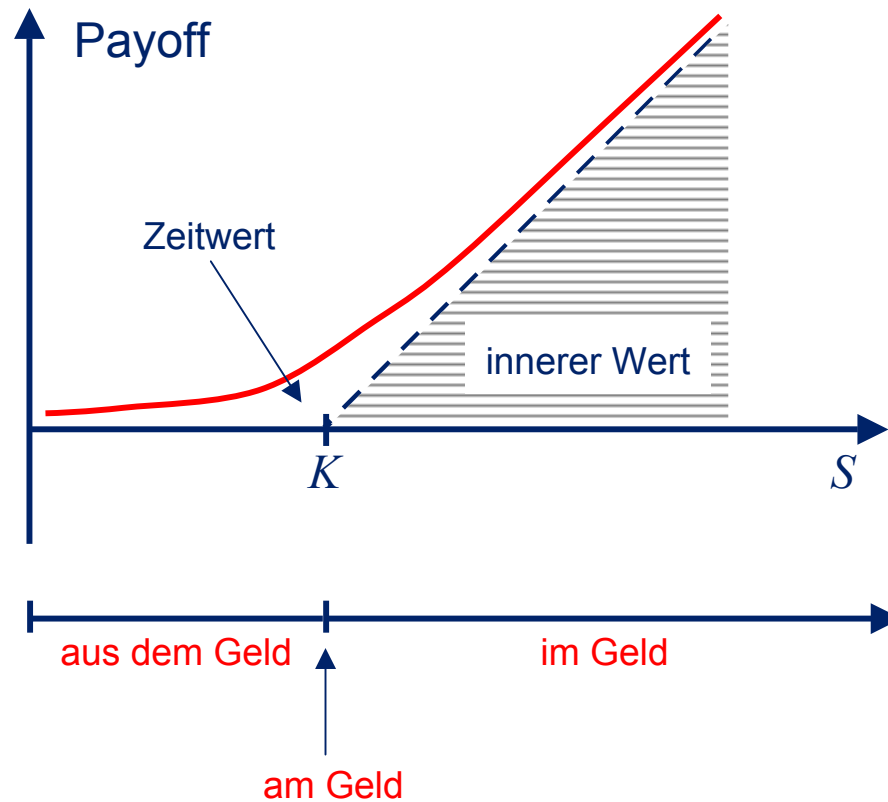
Der Wert einer Option setzt sich aus zwei Komponenten zusammen, dem **inneren Wert** und dem **Zeitwert**.

Der innerer Wert entspricht dem Erlös, der bei sofortiger Ausübung erzielt würde. Der Zeitwert ist die Differenz zwischen dem Marktwert der Option und dem inneren Wert.

Bemerkung:

Eine amerikanische Option ist aufgrund des Rechts zur vorzeitigen Ausübung mindestens so teuer wie ihr innerer Wert.

Skizze des aktuellen Kurses einer Plain Vanilla Call Option (Long)



Was bestimmt den Wert einer Option?

Im folgenden wird der **Wert einer Option** mit V bezeichnet. Es ist klar (bzw. ergibt sich aus der Lösung der Black-Scholes Gleichung), dass V von den folgenden Größen abhängt:

- Aktuelle **Zeit** t und **Kurs** $S(t)$ des Underlyings
- **Volatilität** σ und **Drift** μ des Underlyings (Parameter des Underlyings)
- **Strike Price** K und **Verfalldatum** T der Option (Parameter der speziellen Option)
- **Risikoloser Zins** r (Parameter der zugrunde liegenden Wahrung)

$$\Rightarrow V = V(S, t; \mu, \sigma; K, T; r)$$

Zur Bezeichnung des Optionswertes werden i.a. jedoch nur die Variablen S und t benutzt: $V = V(S, t)$

Die Annahmen im Black-Scholes Modell

- Das Underlying folgt einer geometrischen Brownschen Bewegung mit bekannter Volatilität, d.h. S wird beschrieben durch die stochastische Differentialgleichung $dS = \mu S dt + \sigma S dW$.
- Der risikolose Zinssatz r ist bekannt.
- Kontinuierliches Handeln ist möglich.
- Es gibt keine Transaktionskosten bzgl. des Underlyings (keine „Reibung“).
- Es gibt keine Möglichkeiten zur Arbitrage.
- (Das Underlying beinhaltet keine Dividendenzahlungen.)

Inhalt

- 1 Stochastische Prozesse
- 2 Itô Integral und stochastische Differentialgleichungen
- 3 Vom Random Walk zur Brownschen Bewegung

- 4 Die Annahmen im Black-Scholes Modell
- 5 **Herleitung der Black-Scholes Gleichung**
- 6 Allgemeine Lösung der B.-S. Gleichung für europäische Optionen

- 7 Die Put-Call Parität
- 8 Analytische Bewertung einiger europäischer Optionen

- 9 Binomialbaum Methode
- 10 Weitere Finite Differenzen Methoden: Explizit, implizit, Crank-Nicolson
- 11 Vergleich der Finiten Differenzen Methoden und weitere Verfahren

Ein besonderes Portfolio

Ziel:

Konstruktion eines risikolosen Portfolios

Idee:

Benutze die positive (bzw. negative) Korrelation zwischen einer Call (bzw. einer Put) Option und dessen Underlying

Ansatz:

Das Portfolio bestehe aus einer Option (Long Position) minus dem Δ -fachen des Underlyings (Short Position), d.h. der Wert der Option ist gegeben durch

$$\Pi(S, t) = V(S, t) - \Delta S \quad (1)$$

Wertveränderung des Portfolios (1)

Die Wertveränderung des Portfolios ist gegeben durch die Wertveränderungen der Option sowie des Underlyings,

$$d\Pi = dV - \Delta dS . \quad (2)$$

→ Hier geht die Annahme ein, dass das Underlying keine Dividendenzahlungen beinhaltet.

Nach Itô's Lemma gilt

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS . \quad (3)$$

→ Hier geht die Annahme ein, dass der Kurs des Underlyings der geometrischen Brownschen Bewegung genügt.

Wertveränderung des Portfolios (2)

Aus (2) und (3) folgt

$$d\Pi = \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)}_{\text{deterministischer Anteil}} dt + \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right)}_{\text{stochastischer Anteil}} dS .$$

Um das Risiko im Portfolio Π zu eliminieren, wähle man daher

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \quad (4)$$

Delta Hedging

Definition:

Die Reduzierung von Zufall bzw. Risiko in einem Portfolio bezeichnet man als **Hedging**.

Die vollständige Eliminierung des Risikos eines Portfolios durch Ausnutzung der Korrelation zwischen zwei Finanzinstrumenten heißt **Delta-Hedging**.

Bemerkung:

Delta-Hedging ist ein Beispiel einer **dynamischen Hedge Strategie**. Da sich $\frac{\partial V}{\partial S}$ permanent ändert, muss für einen perfekten Hedge die Anzahl Δ der Anteile des Underlyings am Portfolio kontinuierlich angepasst werden.

→ Hier gehen die Annahmen ein, dass kontinuierliches Handeln möglich ist und dass es keine Transaktionskosten bzgl. des Underlyings gibt.

Keine Arbitragemöglichkeiten (1)

Durch die Wahl von $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ folgt, dass der Wertzuwachs

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \quad (5)$$

des Portfolios vollständig risikolos ist.

Man betrachte andererseits einen Bargeldbestand, der zur Zeit t dem Wert Π des Portfolios entspricht. Wenn man diesen Bargeldbestand mit dem risikolosen Zinssatz r anlegt, entspricht der Wertzuwachs gerade den Zinsen, d.h.

$$d\Pi = r\Pi dt \quad (6)$$

→ Hier gehen die Annahmen ein, dass der risikolosen Zinssatz r bekannt ist und dass es keine Arbitragemöglichkeiten gibt.

Keine Arbitragemöglichkeiten (2)

Die Gleichheit von (5) und (6) ist ein Beispiel für ein **No-Arbitrage Prinzip!**

Betrachte die beiden Fälle

$$1) \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt > r \Pi dt$$

In diesem Fall würde man sich Geld zum risikolosen Zinssatz r von der Bank leihen und in das risikolose Portfolio investieren. Zusammen würde man also einen risikolosen Gewinn realisieren.

$$2) \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt < r \Pi dt$$

In diesem Fall würde man das risikolose Portfolio verkaufen, um das dadurch eingenommene Geld zum risikolosen Zinssatz r bei der Bank anzulegen. Zusammen würde man auch hier einen risikolosen Gewinn realisieren.

Die Black-Scholes Gleichung

Aus den Gleichungen (1), (4), (5) und (6) folgt:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt = r \left(V - S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt$$

Durch Umformung folgt die

$$\text{Black-Scholes Gleichung: } \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (7)$$

Bemerkungen zur Black-Scholes Gleichung (1)

- In der Herleitung der Black-Scholes Gleichung wurde an keiner Stelle festgelegt, um welche Art von Option (oder allgemeiner: Derivat) es sich handelt. Es wurden nur Eigenschaften des Underlyings benötigt.
 - ⇒ **Pro Underlying gibt es nur *eine einzige* Differentialgleichung (DGL) für *alle* Derivate auf dieses Underlying!** Insbesondere gilt die Black-Scholes Gleichung für europ. und amerikan. Optionen und für Bermuda-Optionen.
- Die verschiedenen Derivate unterscheiden sich nur in verschiedenen Anfangs-, End- oder Randbedingungen.

Beispiele:

 - Auszahlungsprofil am Verfalltag bei Optionen
 - Wertlosigkeit bei Vertragsabschluß bei Termingeschäften
- Die Black-Scholes Gleichung enthält folglich nicht den Strike Price K und das Verfalldatum T der Option, da dies Parameter der speziellen Option sind.

Bemerkungen zur Black-Scholes Gleichung (2)

- Die Black-Scholes Gleichung enthält die Variablen S und t sowie die Parameter σ und r .
- Die Black-Scholes Gleichung enthält nicht den Drift Parameter μ .
M.a.W.: Wenn zwei Personen von der gleichen Volatilität des Underlyings ausgehen, werden sie auf den gleichen Wert der Option kommen, unabhängig von der jeweiligen Schätzung des Drift-terms. (Der Drift ist implizit im Kurs S des Underlyings berücksichtigt.)
- Die Black-Scholes Gleichung ist eine lineare partielle DGL zweiter Ordnung. Insbesondere handelt es sich um eine sog. parabolische DGL.
- Sowohl das Underlying (S) als auch „Geld in der Bank“ ($\text{Nominal} \times e^{rt}$) erfüllen die Black-Scholes Gleichung. (notwendig für replizierendes Portfolio)

Replizierendes Portfolio

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt $V(S,t) = \Pi + \Delta S$ mit $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$.

Es ist also möglich, ein Portfolio zu konstruieren, das bei Fälligkeit der durch V beschriebenen Option denselben Wert hat wie die Auszahlung der Option. Dieses Portfolio besteht aus Bargeld im Wert Π und dem Δ -fachen des Underlyings.

Definition:

Ein Portfolio, das den Wert einer Option nachbildet, nennt man **replizierendes Portfolio**.

Einen Markt, in dem man jede Option durch deren Underlying(s) nachbilden kann, nennt man einen **vollständigen Markt**. In diesem Markt sind Optionen redundant.

Berücksichtigung von Dividenden

Situation:

- Dividenden werden i.a. an festen (d.h. diskreten) Terminen gezahlt.
- Die Höhe der Dividenden ist erst kurze Zeit vor deren Ausschüttung bekannt. Sie werden üblicher Weise auf der Jahreshauptversammlung bekanntgegeben.

Idealisierung:

- Das Underlying zahlt eine bekannte, kontinuierliche Dividendenrendite D .

⇒ Die Wertveränderung (2) des Portfolios Π wird modifiziert zu

$$d\Pi = dV - \Delta dS - D\Delta S dt . \quad (2')$$

Die Black-Scholes Gleichung bekommt dann die Form

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 .$$

Inhalt

- 1 Stochastische Prozesse
- 2 Itô Integral und stochastische Differentialgleichungen
- 3 Vom Random Walk zur Brownschen Bewegung

- 4 Die Annahmen im Black-Scholes Modell
- 5 Herleitung der Black-Scholes Gleichung
- 6 **Allgemeine Lösung der B.-S. Gleichung für europäische Optionen**

- 7 Die Put-Call Parität
- 8 Analytische Bewertung einiger europäischer Optionen

- 9 Binomialbaum Methode
- 10 Weitere Finite Differenzen Methoden: Explizit, implizit, Crank-Nicolson
- 11 Vergleich der Finiten Differenzen Methoden und weitere Verfahren

Lösungsidee

Ziel:

Herleitung einer *analytischen* Lösung der Black-Scholes Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

für europäische Optionen.

Die *Endbedingung*, die wir zur Lösung der DGL benötigen, ist gegeben durch die Funktion, die am Ende der Optionslaufzeit T das Auszahlungsprofil beschreibt:

$$\text{Payoff}(S) = V(S, T) \quad (8)$$

Idee:

- Rückführung der Black-Scholes Gleichung auf die Wärmeleitungsgleichung durch Variablentransformation.
- Benutzung der (in der Physik) bekannten Lösung der Wärmeleitungsgleichung.

1. Lösungsschritt

Definiere die Funktion $U(S,t)$ durch

$$V(S,t) \equiv e^{-r(T-t)}U(S,t) . \quad (9)$$

Motivation:

Da der Payoff zur Zeit T bekannt ist, möchte man von „Barwerten auf zukünftige Werte“ wechseln.

Es folgt:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = rV + e^{-r(T-t)} \frac{\partial U}{\partial t}, \quad \frac{\partial V}{\partial S} = e^{-r(T-t)} \frac{\partial U}{\partial S}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = e^{-r(T-t)} \frac{\partial^2 U}{\partial S^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + rS \frac{\partial U}{\partial S} = 0 \quad (10)$$

2. Lösungsschritt

Benutze die Variablentransformation

$$t \rightarrow \tilde{\tau} \equiv T - t . \quad (11)$$

Motivation:

Durch die Variablentransformation (11) wollen wir von einer Rückwärts-DGL (mit Endbedingung) zu einer Vorwärts-DGL (mit Anfangsbedingung) gelangen.

Es folgt:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \frac{\partial U}{\partial \tilde{\tau}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \tilde{\tau}} = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + rS \frac{\partial U}{\partial S} \quad \text{mit} \quad V(S, t) = e^{-r\tilde{\tau}} U(S, T - \tilde{\tau}) \quad (12)$$

3. Lösungsschritt

Benutze die Variablentransformation

$$S \rightarrow \xi \equiv \log S \quad (13)$$

Motivation:

Eliminierung der S -abhängigen Koeffizienten in (12).

Es folgt:

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \frac{\partial \xi}{\partial S} \frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{1}{S} \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2} \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \tilde{t}} = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{\partial U}{\partial \xi} \quad \text{mit} \quad V(S, t) = e^{-r\tilde{t}} U(e^\xi, T - \tilde{t}) \quad (14)$$

4. Lösungsschritt

Benutze die Variablentransformation

$$\begin{aligned}\xi &\rightarrow x \equiv \xi + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tilde{\tau} \\ \tilde{\tau} &\rightarrow \tau \equiv \tilde{\tau}\end{aligned} \quad (15)$$

Motivation:

Eliminierung des Terms erster Ordnung in S in (14).

Es folgt:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial U}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial \xi}}_{=0} \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = \dots = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tilde{\tau}} = \frac{\partial x}{\partial \tilde{\tau}} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial \tilde{\tau}} \frac{\partial U}{\partial \tau} = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \tau} = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \tau}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}} \quad \text{mit} \quad V(S, t) = e^{-r\tau} U\left(e^{x - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}, T - \tau\right) \equiv e^{-r\tau} W(x, \tau) \quad (16)$$

Superposition von Lösungen

Gleichung (16) ist die gesuchte Wärmeleitungsgleichung. Eine mögliche Lösung dieser Differentialgleichung ist für $\tau > 0$ die sog. Elementarlösung

$$W_e(x, \tau; x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi \tau \sigma}} \exp\left\{-\frac{(x - x')^2}{2\sigma^2 \tau}\right\}. \quad (17)$$

Da die Wärmeleitungsgleichung (16) eine lineare DGL ist, kann man aus (17) weitere Lösungen durch Superposition, d.h. durch Integration bilden:

$$W(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} W_e(x, \tau; x') g(x') dx' \quad (18)$$

Dabei muss die Funktion $g(x')$ derart sein, dass das Integral definiert ist.

Benutzung der Randbedingung

Um eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung (16) und damit auch der Black-Scholes Gleichung (7) zu gegebenen Randbedingungen zu ermitteln, müssen diese ebenfalls in die neuen Variablen transformiert werden.

Es gilt:

$$V(S, T) = \text{Payoff}(S) \Rightarrow W(x, 0) = \text{Payoff}(e^x)$$

Wir benutzen ferner, dass $W_e(x, \tau; x')$ für $\tau \rightarrow 0$ die δ -Distribution approximiert,

$$W(x, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') g(x') dx' .$$

Man wähle daher $g(x') = \text{Payoff}(e^{x'})$.

Einsetzen in (17) und (18) liefert

$$W(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \tau \sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x - x')^2}{2\sigma^2 \tau}\right\} \text{Payoff}(e^{x'}) dx' . \quad (19)$$

Rücktransformation der Variablen

Die Rücktransformation der Variablen von (x, τ) nach (S, t) sowie eine Variablentransformation im Integral $x' \rightarrow S' \equiv e^{x'}$ liefert schließlich

$$V(S, t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\left(\log \frac{S}{S'} + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) \right)^2}{2\sigma^2(T-t)} \right\} \frac{\text{Payoff}(S')}{S'} dS' \quad (20)$$

Gleichung (20) ist unsere „**Mastergleichung**“ bei der Berechnung von Werten europäischer Optionen nach dem Black-Scholes Modell.

Bemerkung:

Der **Nobelpreis des Jahres 1997** wurde Myron Scholes und Robert Merton für deren Arbeiten zur Bewertung von Finanzderivaten verliehen. Fisher Black war bereits zuvor verstorben.

Inhalt

- 1 Stochastische Prozesse
- 2 Itô Integral und stochastische Differentialgleichungen
- 3 Vom Random Walk zur Brownschen Bewegung

- 4 Die Annahmen im Black-Scholes Modell
- 5 Herleitung der Black-Scholes Gleichung
- 6 Allgemeine Lösung der B.-S. Gleichung für europäische Optionen

- 7 Die Put-Call Parität**
- 8 Analytische Bewertung einiger europäischer Optionen

- 9 Binomialbaum Methode
- 10 Weitere Finite Differenzen Methoden: Explizit, implizit, Crank-Nicolson
- 11 Vergleich der Finiten Differenzen Methoden und weitere Verfahren

Die Put-Call Parität (1)

Betrachte ein Portfolio Π , dass aus einem Underlying und einer Put Option auf das Underlying mit Strikepreis K und Verfalldatum T (jeweils long Positionen) sowie einer Call Option mit gleichem Strikepreis K und gleichem Verfalldatum T (short Position) besteht:

$$\Pi(t) = S(t) + V_{\text{Put}}(S, t) - V_{\text{Call}}(S, t)$$

Zur Zeit T gilt:

$$V_{\text{Put}}(S, T) = \max(K - S(T), 0), \quad V_{\text{Call}}(S, T) = \max(S(T) - K, 0)$$

Also hat das Portfolio zur Zeit T den Wert $\Pi(T) = K$.

Da der Wert des Portfolios zur Zeit T fest vorgegeben ist, liefert das Portfolio einen risikolosen Gewinn.

Folglich muss der Wert des Portfolios zu einer früheren Zeit gegeben sein durch

$$\Pi(t) = K e^{-r(T-t)} .$$

Zusammen folgt die sog. **Put-Call Parität**: $V_{\text{Put}}(S, t) = V_{\text{Call}}(S, t) - S(t) + K e^{-r(T-t)}$

Die Put-Call Parität (2)

Zur Begründung der Gleichheit von $\Pi(t) = K e^{-r(T-t)}$:

1) Annahme: $\Pi(t) < K e^{-r(T-t)}$

In diesem Fall würde man sich zur Zeit t den Betrag $\Pi(t)$ zum risikolosen Zinssatz r von der Bank leihen und in das risikolose Portfolio investieren. Zur Zeit T schuldet man dann der Bank den Betrag $\Pi(t) e^{r(T-t)}$, erhält jedoch den Payoff K des Portfolios. In der Summe hätte man also einen risikolosen Gewinn in Höhe von $K - \Pi(t) e^{r(T-t)} > 0$ erwirtschaftet.

2) Annahme: $\Pi(t) > K e^{-r(T-t)}$

In diesem Fall würde man zur Zeit t das Portfolio zum Betrag $\Pi(t)$ verkaufen. Von diesem Verkaufserlös würde man den Anteil $K e^{-r(T-t)}$ zum risikolosen Zinssatz r bei der Bank anlegen. Zur Zeit T hat das Bankdepot den Wert K . Dies ist gerade der Betrag, dem man zur Zeit T dem Käufer des Portfolios schuldet. Der zur Zeit t nicht auf das Bankkonto eingezahlte Betrag $\Pi(t) - K e^{-r(T-t)} > 0$ wäre also ein risikoloser Gewinn.

Beide Annahmen stehen im Widerspruch zum No-Arbitrage Prinzip!

Inhalt

- 1 Stochastische Prozesse
- 2 Itô Integral und stochastische Differentialgleichungen
- 3 Vom Random Walk zur Brownschen Bewegung

- 4 Die Annahmen im Black-Scholes Modell
- 5 Herleitung der Black-Scholes Gleichung
- 6 Allgemeine Lösung der B.-S. Gleichung für europäische Optionen

- 7 Die Put-Call Parität
- 8 Analytische Bewertung einiger europäischer Optionen

- 9 Binomialbaum Methode
- 10 Weitere Finite Differenzen Methoden: Explizit, implizit, Crank-Nicolson
- 11 Vergleich der Finiten Differenzen Methoden und weitere Verfahren

Approximation der kumulierten Standardnormalverteilung (1)

Problem:

Viele Lösungen der Black-Scholes Gleichung enthalten die kumulierte Standardnormalverteilung

$$\Phi(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

$\Phi(d)$ kann analytisch exakt nicht weiter vereinfacht werden. Zur Berechnung der Optionswerte benutzt man daher

- Interpolation zwischen tabellierten Werte für $\Phi(d)$ oder besser
- die folgende Approximation:

$$\Phi(d) = \begin{cases} 1 - \Phi'(d)(a_1k + a_2k^2 + a_3k^3 + a_4k^4 + a_5k^5) & \text{falls } d \geq 0 \\ 1 - \Phi(-d) & \text{falls } d < 0 \end{cases}$$

$$\text{mit } \Phi'(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d^2}{2}} \text{ und ...}$$

Approximation der kumulierten Standardnormalverteilung (2)

$$k = \frac{1}{1 + \gamma d}$$

$$\gamma = 0.2316419$$

$$a_1 = 0.319381530$$

$$a_2 = -0.356563782$$

$$a_3 = 1.781477937$$

$$a_4 = -1.821255978$$

$$a_5 = 1.330274429$$

Bemerkungen:

- Die Näherungsformel ist bis zur 6. Dezimalstelle genau.
- Literatur: M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications

Beispiel 1: Wert einer Plain Vanilla Call Option (1)

Das Auszahlungsprofil einer Plain Vanilla Call Option ist gegeben durch $\text{Payoff}(S) = \max(S - K, 0)$, wobei K der Strikepreis der Option ist.

Aus (20) folgt:

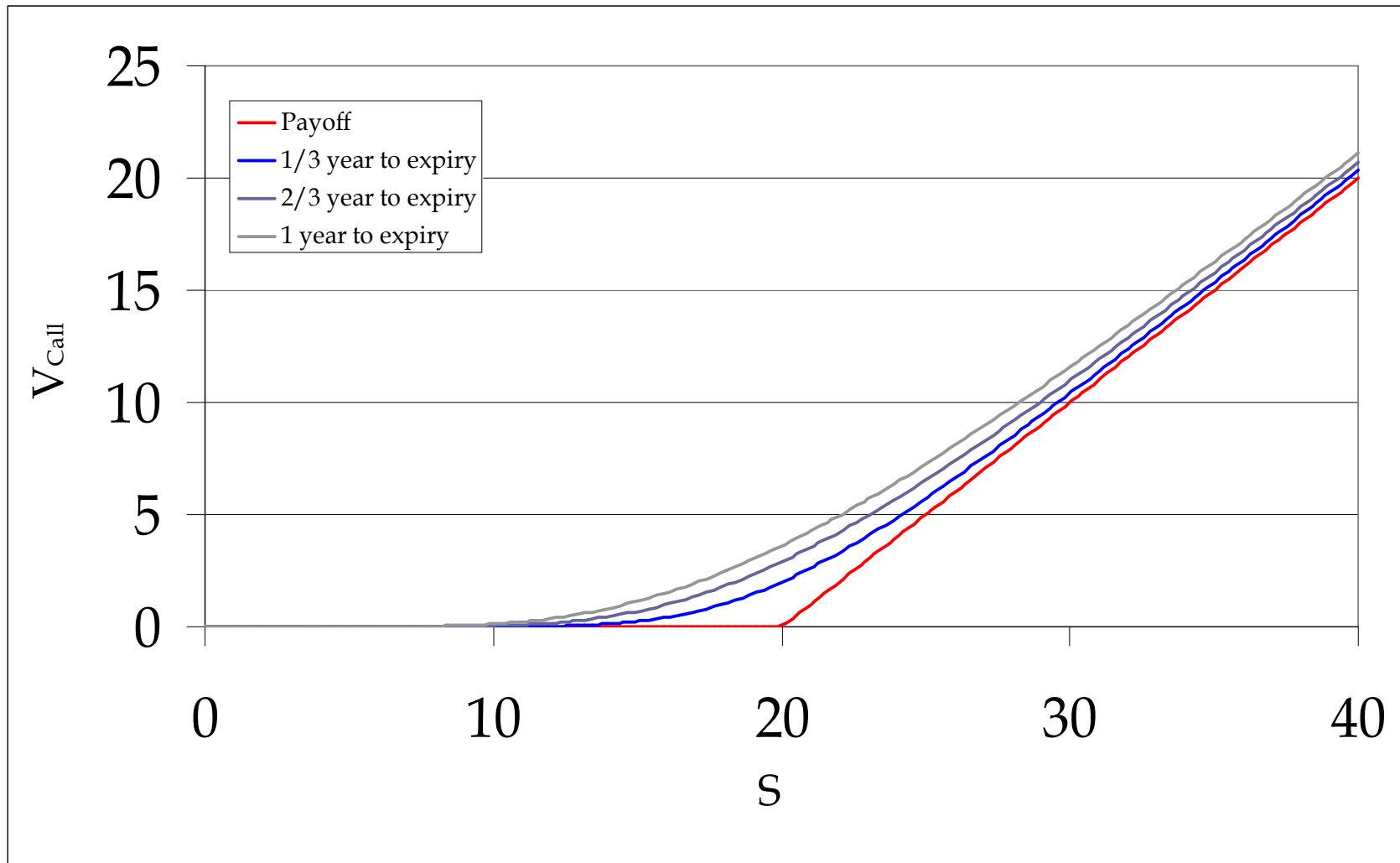
$$V_{\text{P.V.Call}}(S, t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_K^{\infty} \exp\left\{-\frac{\left(\log \frac{S}{S'} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right\} \frac{S' - K}{S'} dS'$$

Berechnung des Integrals (mittels quadratischer Ergänzung) liefert

$$V_{\text{P.V.Call}}(S, t) = S \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \quad \text{mit}$$

$$d_1 = \frac{\log \frac{S}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{und} \quad d_2 = \frac{\log \frac{S}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (21)$$

Beispiel 1: Wert einer Plain Vanilla Call Option (2)



Bemerkungen zur Bewertung von Plain Vanilla Call Opt.

Interpretation der Lösung $V_{\text{P.V.Call}}(S, t) = S \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2)$:

- Der Term $S \Phi(d_1)$ steht für den Wert des Underlyings, das der Käufer der Option im Fall der Ausübung bezieht.
- Der Term $-K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2)$ repräsentiert den Wert des Ausübungskurses.

Bemerkungen:

- Der Zeitwert der Option ist stets größer oder gleich Null.
- Bei $S = 0$ gilt $V_{\text{P.V.Call}}(0, t) = 0$. Konsistent mit geometrischer Brownscher Bewegung, da sich der Kurs von $S = 0$ nicht mehr entfernen kann!
- Für $S \gg K$ (d.h. die Option ist weit im Geld) gelten $\Phi(d_1) \rightarrow 1$ und $\Phi(d_2) \rightarrow 1$.
Damit folgt $V_{\text{P.V.Call}}(S, t) \xrightarrow{S \gg K} S - K e^{-r(T-t)} (\approx S)$.
Der Wert der Option ist also „Wert des Underlyings - (Bar-) Wert des Ausübungskurses“.

Beispiel 2: Wert einer Plain Vanilla Put Option (1)

Das Auszahlungsprofil einer Plain Vanilla Put Option ist gegeben durch $\text{Payoff}(S) = \max(K - S, 0)$, wobei K der Strikepreis der Option ist.

Aus Gleichung (21) und der Put-Call Parität folgt

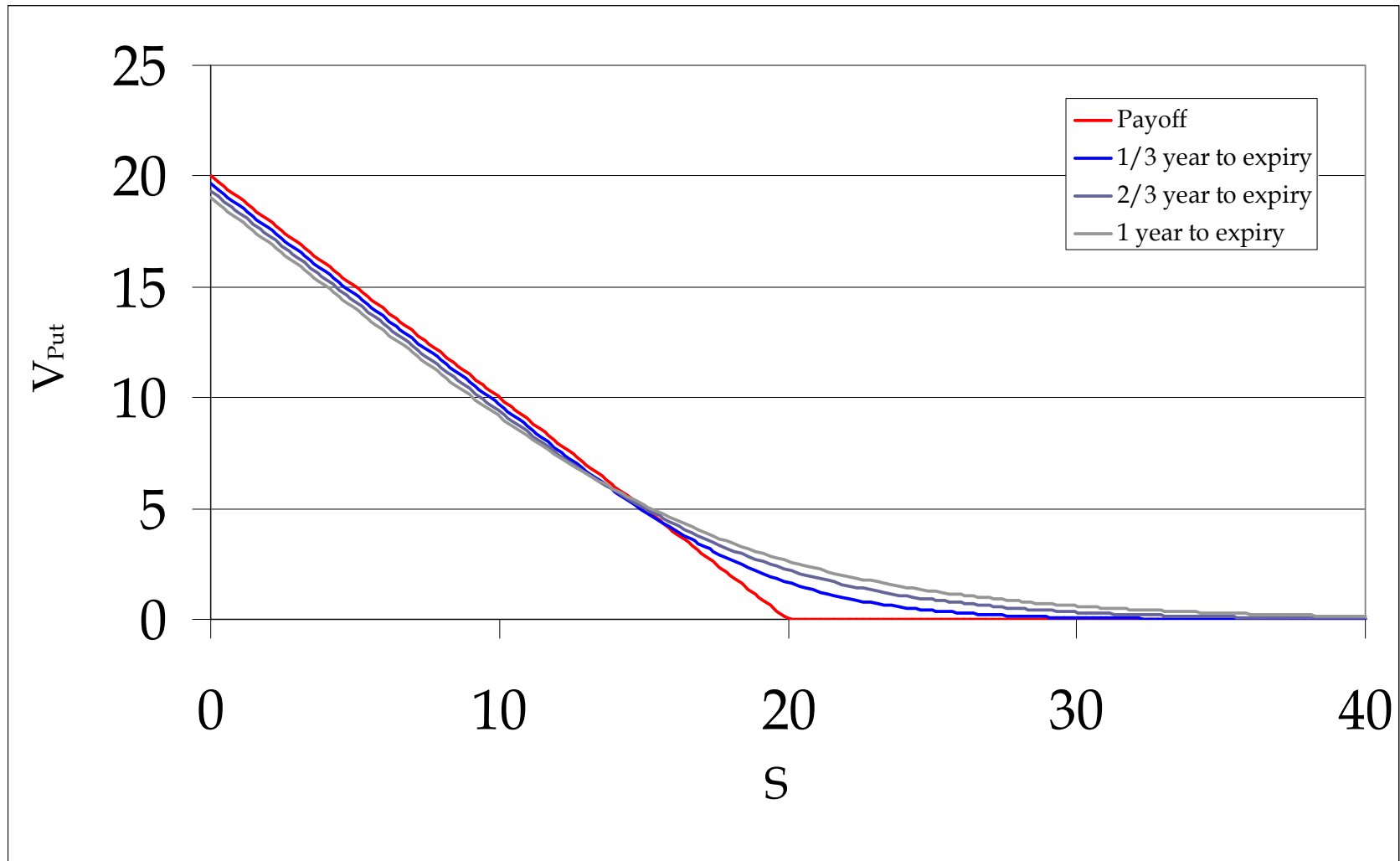
$$\begin{aligned}V_{\text{P.V.Put}}(S, t) &= S \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) - S + K e^{-r(T-t)} \\ &= -S (1 - \Phi(d_1)) + K e^{-r(T-t)} (1 - \Phi(d_2))\end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_{\text{P.V.Put}}(S, t) = -S \Phi(-d_1) + K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) \quad (22)$$

Bemerkung:

Man hätte Gleichung (22) natürlich auch aus der Mastergleichung (20) in Verbindung mit dem Auszahlungsprofil $\max(K-S(T), 0)$ berechnen können.

Beispiel 2: Wert einer Plain Vanilla Put Option (2)



Bemerkungen zur Bewertung von Plain Vanilla Put Opt.

Interpretation der Lösung $V_{\text{P.V. Put}}(S, t) = -S \Phi(-d_1) + K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2)$ ist vollkommen analog zur Plain Vanilla Call Option.

Bemerkungen:

- Der Zeitwert der Option kann größer, kleiner oder gleich Null sein.
Grund: Bei einer Put Option ist der mögliche Gewinn bei Verfall *begrenzt*. Im Gegensatz dazu ist bei einer Call Option der mögliche Gewinn *unbegrenzt*.
- Bei $S = 0$ gilt $V_{\text{P.V. Put}}(0, t) = K e^{-r(T-t)}$. Konsistent mit geometrischer Brownscher Bewegung, da sich der Kurs von $S = 0$ nicht mehr entfernen kann! Die Auszahlung zur Zeit T steht daher fest, so dass der Wert der Put Option deterministisch sein und der abgezinnten Auszahlung entsprechen muss.
- Für $S \gg K$ (d.h. die Option ist weit aus dem Geld) gelten $\Phi(-d_1) \rightarrow 0$ und $\Phi(-d_2) \rightarrow 0$. Die Option ist in diesem Fall nahezu wertlos, $V_{\text{P.V. Put}}(S, t) \xrightarrow{S \gg K} 0$.

Beispiel 3: Wert einer binären Call Option (1)

Das Auszahlungsprofil einer binären Call Option ist gegeben durch

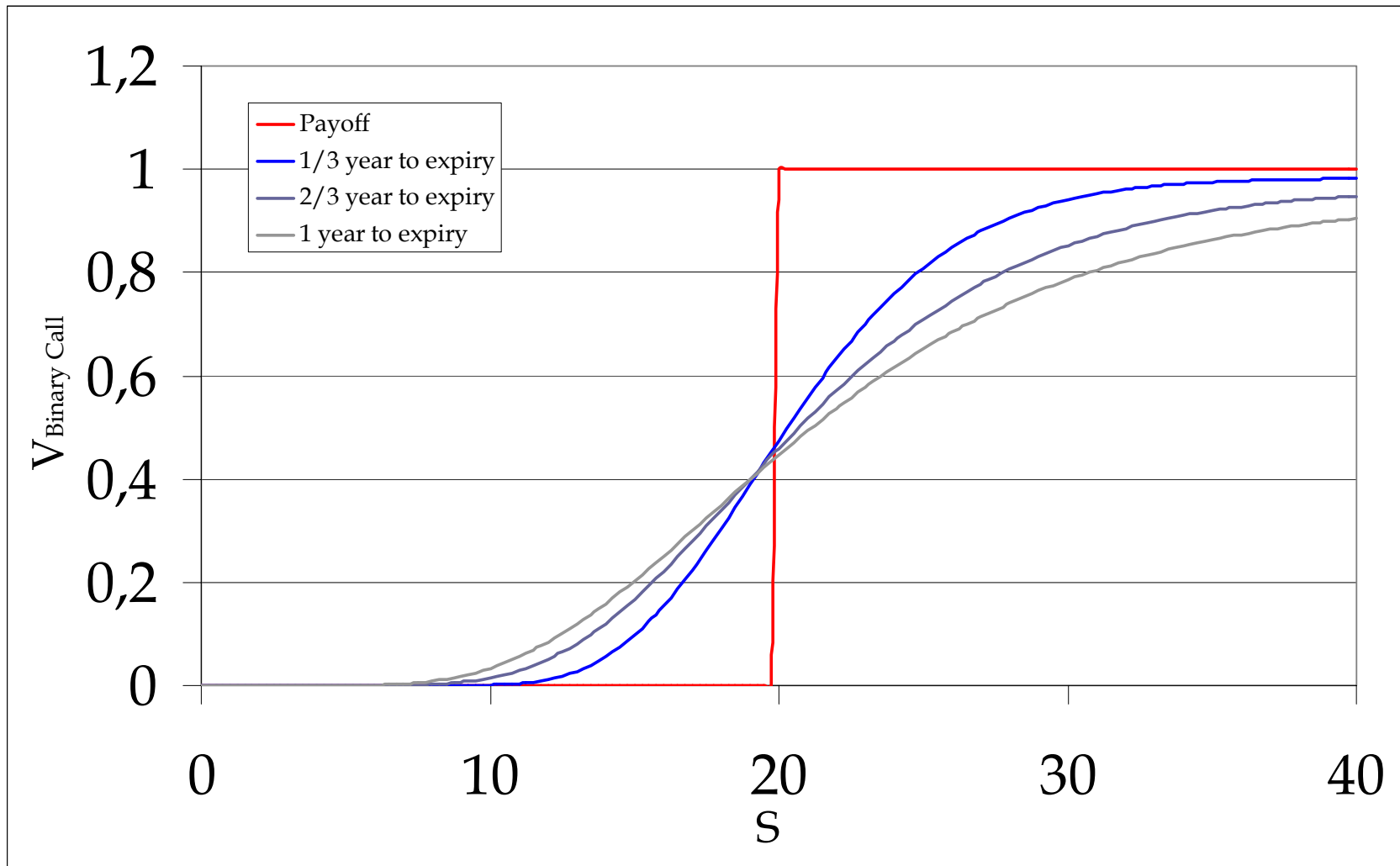
$$\text{Payoff}_{\text{Binärer Call}}(S) = \Theta(S - K) = \begin{cases} 1 & \text{falls } S \geq K \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Eine binäre Option heißt daher auch **Cash-or-Nothing** Option.

Aus der Mastergleichung folgt:

$$V_{\text{Binärer Call}}(S, t) = e^{-r(T-t)} \Phi(d_2)$$

Beispiel 3: Wert einer binären Call Option (2)



Beispiel 4: Wert einer binären Put Option (1)

Das Auszahlungsprofil einer binären Put Option ist gegeben durch

$$\text{Payoff}_{\text{Binärer Put}}(S, T) = \begin{cases} 1 & \text{falls } S < K \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Aus der Mastergleichung folgt:

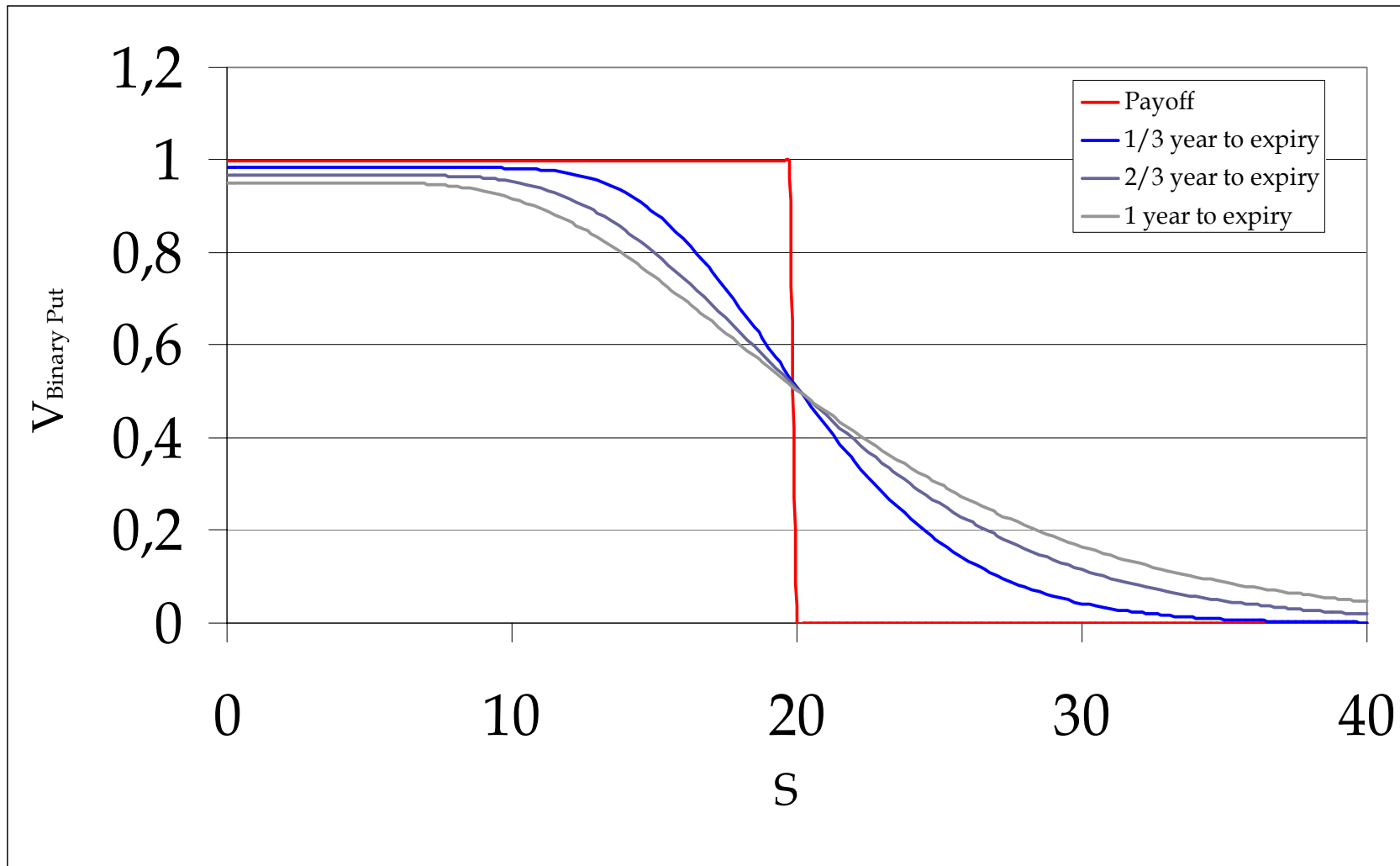
$$V_{\text{Binärer Put}}(S, t) = e^{-r(T-t)} (1 - \Phi(d_2))$$

Bemerkung:

Eine Portfolio aus je einer binären Call und einer binären Put Option zum jeweils gleichen Strikepreis K hat bei Fälligkeit die deterministische Auszahlung 1 (unabhängig vom dann aktuellen Wert des Underlyings). Folglich muss der Wert dieses Portfolios heute dem abgezinnten Wert von 1 entsprechen:

$$V_{\text{Binärer Call}}(S, t) + V_{\text{Binärer Put}}(S, t) = e^{-r(T-t)} \Rightarrow V_{\text{Binärer Put}}(S, t) = e^{-r(T-t)} (1 - \Phi(d_2))$$

Beispiel 4: Wert einer binären Put Option (2)



Bemerkungen zur Bewertung binärer Optionen

- Eingesetzt wird eine binäre Call Option z.B. dann, wenn der Käufer die Meinung vertritt, dass der Marktpreis des Underlyings in Zukunft nur wenig steigen wird.
- Wenn der Käufer der Meinung ist, dass der Marktpreis des Underlyings in Zukunft stark steigen wird, so wird er nicht in eine binäre Call Option investieren sondern z.B. in eine Plain Vanilla oder eine Power Call Option.
- I.a. wird der Kaufpreis einer binären Call Option niedriger sein als die Kaufpreise der vergleichbaren (d.h. alle Optionen haben den gleichen Strike Preis) Plain Vanilla oder Power Call Optionen.
- Die drei obigen Bemerkungen gelten analog für Put Optionen.

Verschiedene Arten von Power Option

Definition:

Optionen, deren Auszahlungsprofil Potenzen des Underlyingpreises beinhalten, nennt man **Power Optionen**.

Je nach Art des Auszahlungsprofils unterscheidet man zwischen **asymmetrischen** und **symmetrischen** Power Optionen:

- Asym. Power Call Option: $\text{Payoff}_{\text{Asym. Power Call}}(S) = \max(S^\alpha - K^\alpha, 0)$
- Asym. Power Put Option: $\text{Payoff}_{\text{Asym. Power Put}}(S) = \max(K^\alpha - S^\alpha, 0)$
- Sym. Power Call Option: $\text{Payoff}_{\text{Sym. Power Call}}(S) = \begin{cases} (S - K)^\alpha & \text{falls } S > K \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- Sym. Power Put Option: $\text{Payoff}_{\text{Sym. Power Put}}(S) = \begin{cases} (K - S)^\alpha & \text{falls } S < K \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Bemerkungen zu Power Optionen

- Für den Exponenten gilt die Einschränkung $\alpha > 0$.
- Für $\alpha = 1$ entsprechen sowohl die asymmetrischen als auch die symmetrischen Power Optionen den entsprechenden Plain Vanilla Optionen.
- Eingesetzt wird eine (a)symmetrische Call [bzw. Put] Option z.B. dann, wenn der Käufer die Meinung vertritt, dass der Marktpreis des Underlyings in Zukunft stark steigen [bzw. fallen] wird.
- Wenn der Käufer der Meinung ist, dass der Marktpreis des Underlyings in Zukunft moderat oder nur gering steigen wird, so wird er nicht in eine Power Call Option investieren sondern z.B. in eine Plain Vanilla Call Option oder eine binäre Call Option. (Put analog)
- I.a. wird der Kaufpreis einer Power Call Option höher sein als die Kaufpreise der vergleichbaren Plain Vanilla oder binären Call Optionen. (Put analog)

Beispiel 5: Wert einer asym. Power Call Option (1)

Mittels Auszahlungsprofil und Mastergleichung kann man den Wert einer asymmetrischen Power Call Option bestimmen.

Alternativ: Variablentransformation $S \rightarrow \tilde{S} \equiv S^\alpha$ und Benutzung der bekannten Lösung für eine Plain Vanilla Call Option

Es folgt:

$$S \frac{\partial V}{\partial S} = \alpha \tilde{S} \frac{\partial V}{\partial \tilde{S}}, \quad S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \alpha(\alpha-1) \tilde{S} \frac{\partial V}{\partial \tilde{S}} + \alpha^2 \tilde{S}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \tilde{S}^2}$$

Mit den Variablen \tilde{S} und t folgt aus der Black-Scholes Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \underbrace{\alpha^2 \sigma^2 \tilde{S}^2}_{\equiv \tilde{\sigma}^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \tilde{S}^2} + \alpha \underbrace{\left(\frac{1}{2} \sigma^2 (\alpha-1) + r \right)}_{\equiv b} \tilde{S} \frac{\partial V}{\partial \tilde{S}} - rV = 0 .$$

Beispiel 5: Wert einer asym. Power Call Option (2)

Für $b = r - D$ entspricht die letzte Gleichung der Black-Scholes Gleichung bei Berücksichtigung einer stetigen Dividendenrendite. Reskalierung des Strikes mittels $K \rightarrow \tilde{K} \equiv K^\alpha$ liefert das Auszahlungsprofil $\max(\tilde{S} - \tilde{K}, 0)$.

In den Variablen \tilde{S} und t lautet dann die Lösung:

$$V_{\text{Asym. Power Call}}(\tilde{S}, t) = \tilde{S} e^{-(r-b)(T-t)} \Phi(\tilde{d}_1) - \tilde{K} e^{-r(T-t)} \Phi(\tilde{d}_2) \quad \text{mit}$$

$$\tilde{d}_1 = \frac{\log \frac{\tilde{S}}{\tilde{K}} + \left(b + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2\right)(T-t)}{\tilde{\sigma} \sqrt{T-t}} \quad \text{und} \quad \tilde{d}_2 = \frac{\log \frac{\tilde{S}}{\tilde{K}} + \left(b - \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2\right)(T-t)}{\tilde{\sigma} \sqrt{T-t}} .$$

Rücktransformation auf die Variablen S und t liefert als ...

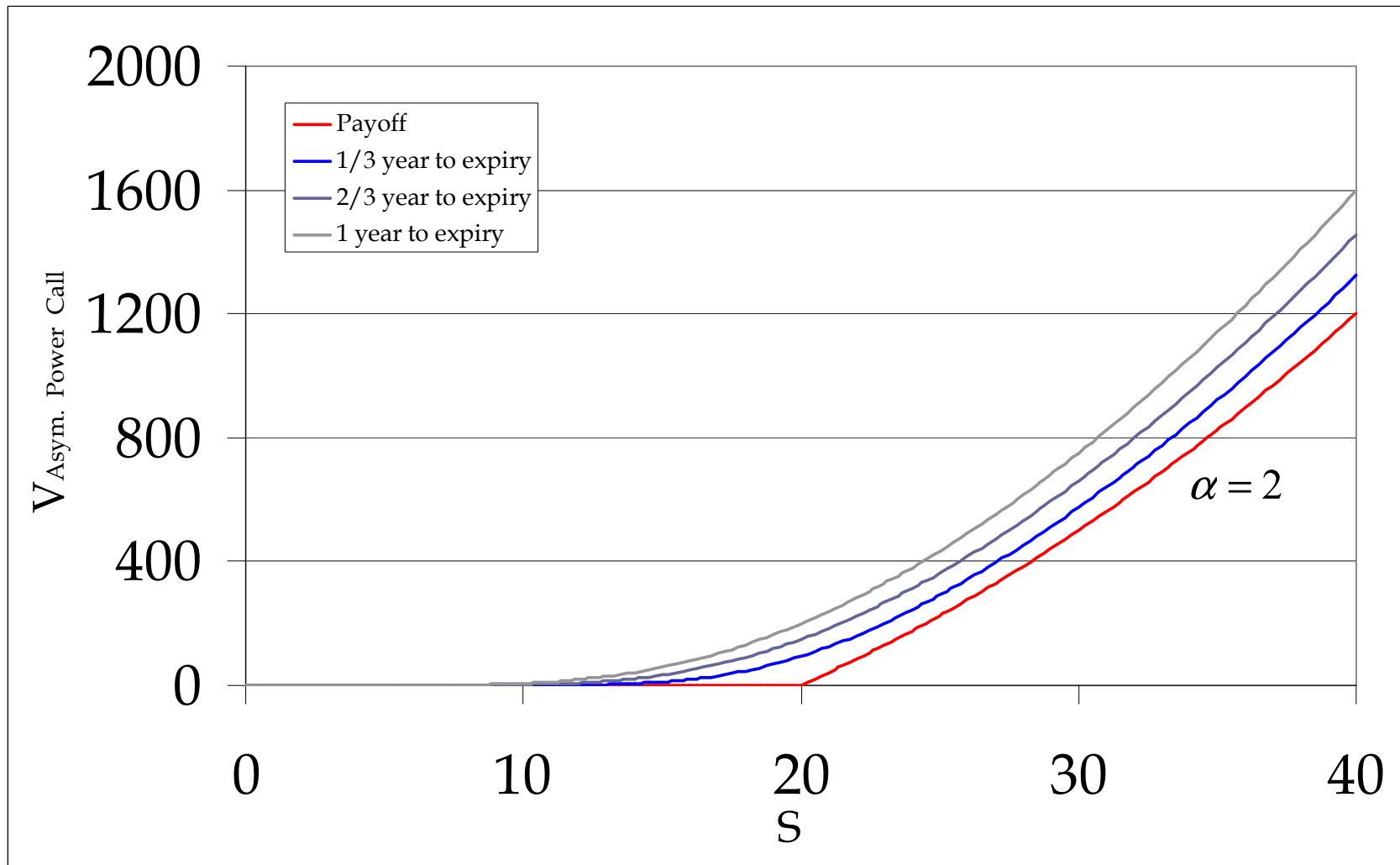
Beispiel 5: Wert einer asym. Power Call Option (3)

... Wert einer asym. Power Call Option:

$$V_{\text{Asym. Power Call}}(S, t) = S^\alpha e^{\left[(\alpha-1)r + \alpha(\alpha-1)\frac{\sigma^2}{2} \right] (T-t)} \Phi(\tilde{d}_1) - K^\alpha e^{-r(T-t)} \Phi(\tilde{d}_2) \quad \text{mit}$$

$$\tilde{d}_1 = \frac{\log \frac{S}{K} + \left(r + \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \quad \text{und} \quad \tilde{d}_2 = \frac{\log \frac{S}{K} + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} .$$

Beispiel 5: Wert einer asym. Power Call Option (4)

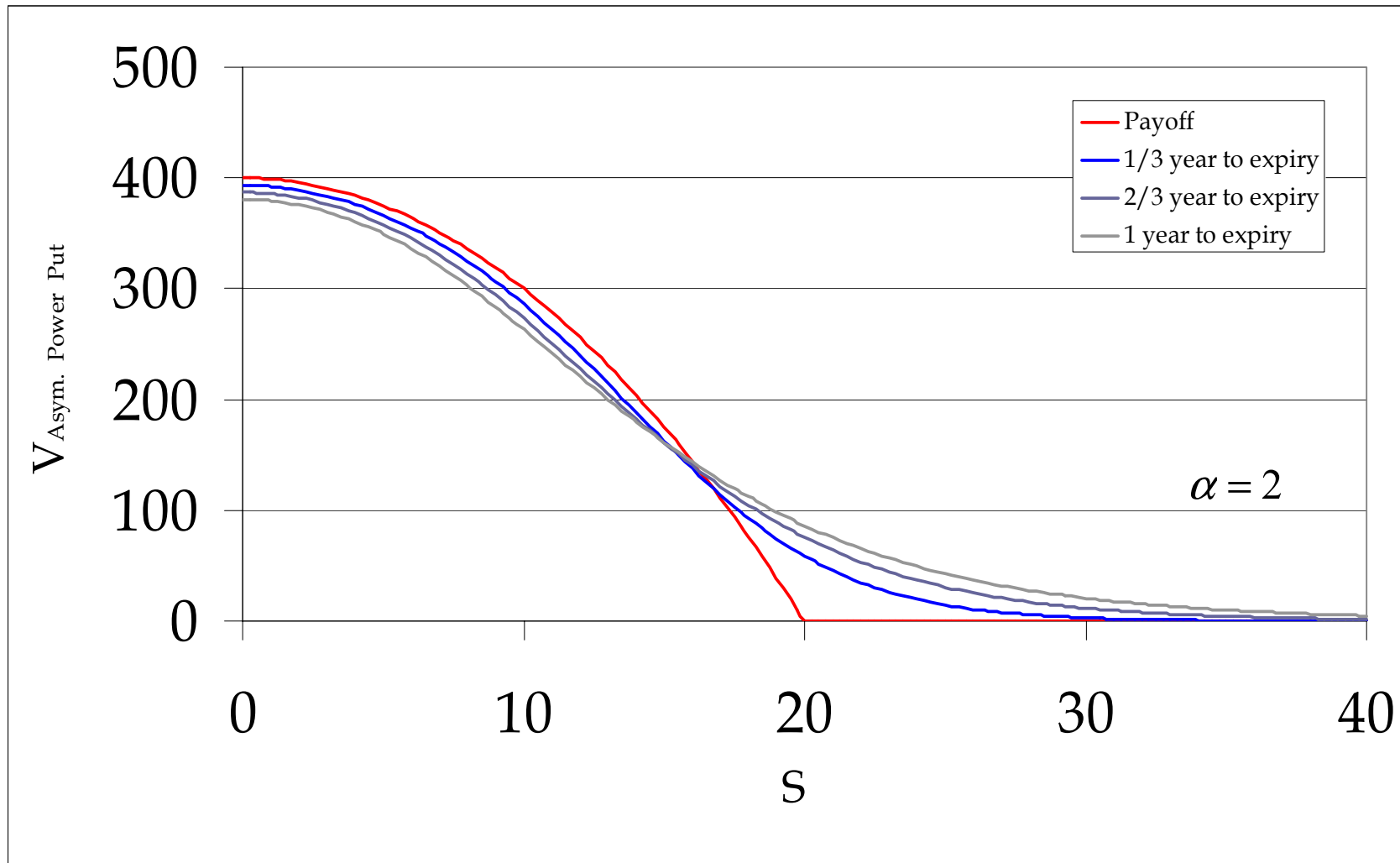


Beispiel 6: Wert einer asym. Power Put Option (1)

Analog erhält man für den Wert einer asym. Power Put Option:

$$V_{\text{Asym. Power Put}}(S, t) = -S^\alpha e^{\left[(\alpha-1)r + \alpha(\alpha-1)\frac{\sigma^2}{2} \right] (T-t)} \Phi(-\tilde{d}_1) + K^\alpha e^{-r(T-t)} \Phi(-\tilde{d}_2)$$

Beispiel 6: Wert einer asym. Power Put Option (2)



Beispiel 7: Wert einer Straddle Option (1)

Das Auszahlungsprofil einer Straddle Option ist gegeben durch

$$\text{Payoff}(S) = |S - K|,$$

wobei K der Strikepreis der Option ist.

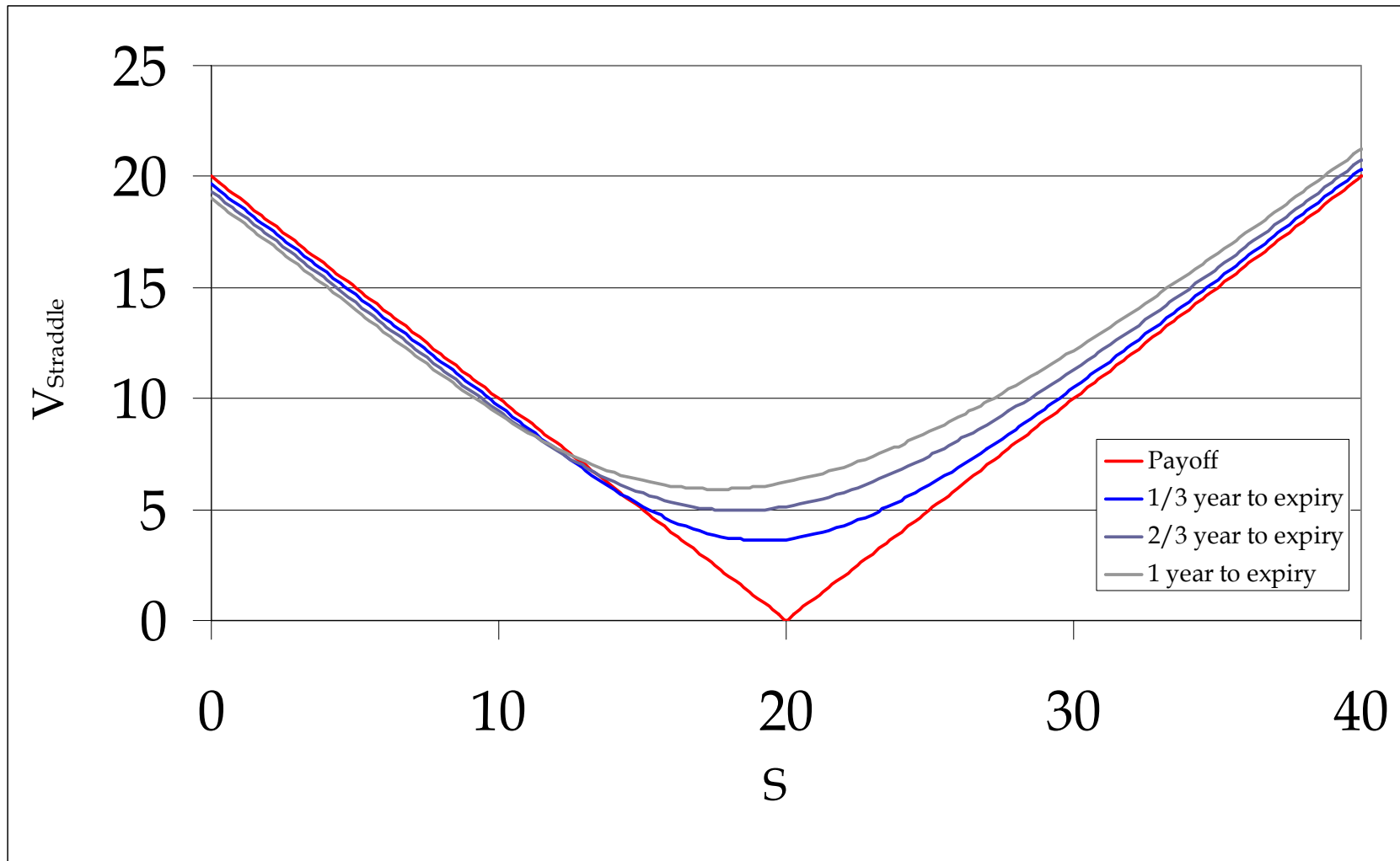
Eine Long Straddle Option entspricht also jeweils einer Long Call Option und einer Long Put Option zum gleichen Strikepreis K :

$$V_{\text{Straddle}}(S, t; K) = V_{\text{Call}}(S, t; K) + V_{\text{Put}}(S, t; K)$$

Definition:

Die Zerlegung eines Finanzderivats in seine Grundbausteine nennt man **Stripping**.

Beispiel 7: Wert einer Straddle Option (2)



Bemerkungen zur Bewertung von Straddle Optionen

Bemerkungen:

- to straddle: rittlings sitzen, mit gespreizten Beinen sitzen
- Eine Straddle Option wird i.a. „am Geld“ gekauft, d.h. zum Zeitpunkt des Kaufes befindet sich der aktuelle Marktpreis des Underlyings in der Nähe des Strikepreises.
- Eingesetzt wird eine Straddle Option z.B. dann, wenn der Käufer die Meinung vertritt, dass sich der Marktpreis des Underlyings in Zukunft vom aktuellen Kurs entweder nach oben oder nach unten entfernt.

Beispiel:

Kursänderung einer Aktie im Anschluss an eine Pressekonferenz (mit vorher ungewissen Inhalten) der Aktiengesellschaft.

Beispiel 8: Wert einer Butterfly Spread Option (1)

Das Auszahlungsprofil einer Butterfly Spread Option ist gegeben durch

$$\text{Payoff}_{\text{Butterfly Spread}}(S) = \begin{cases} S - K_1 & \text{falls } S \in [K_1, K_2[\\ K_2 - S & \text{falls } S \in [K_2, K_3] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

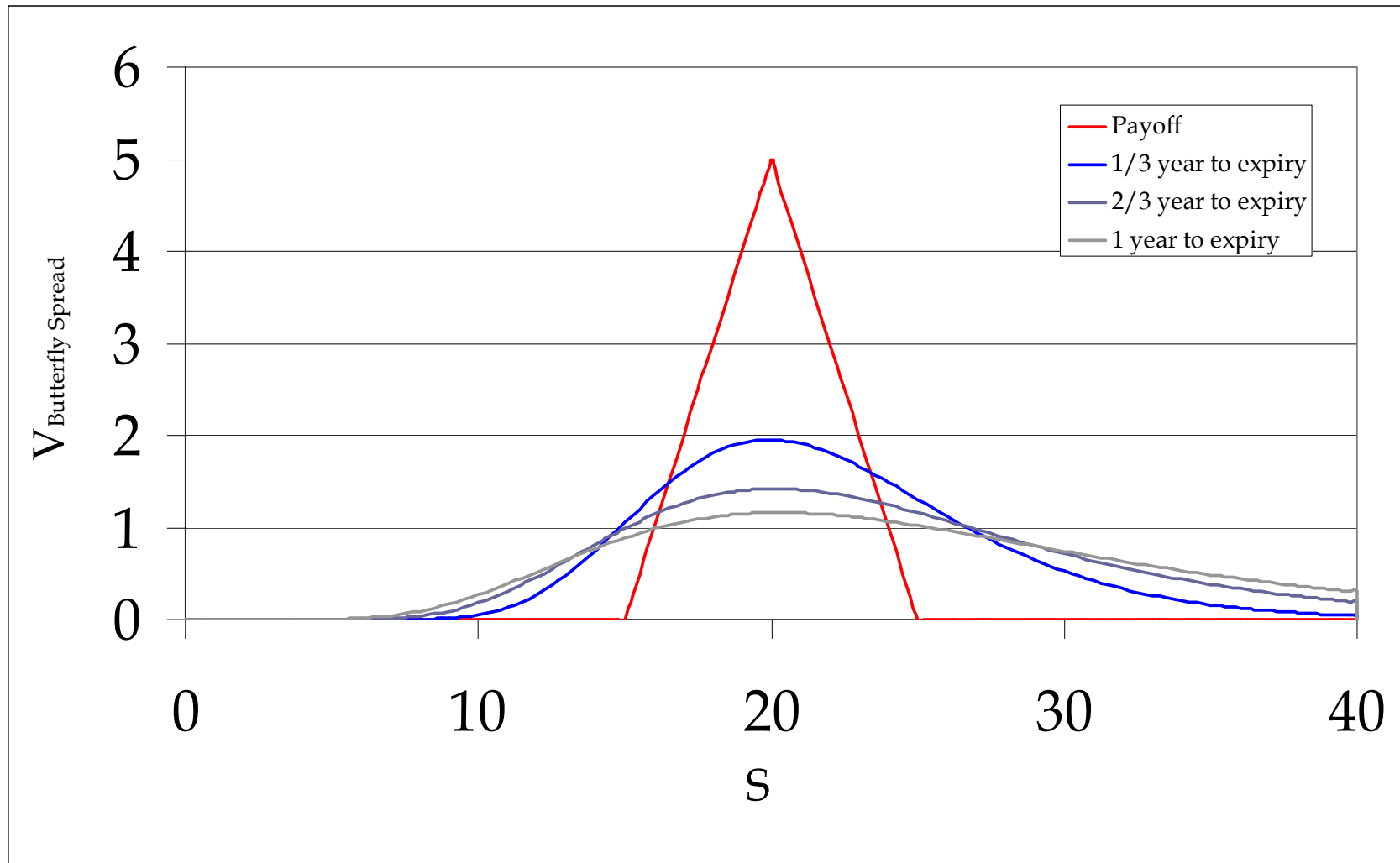
Eine Butterfly Spread Option wird also durch drei Strikepreise K_1 , K_2 und K_3 charakterisiert.

Stripping:

Eine Long Butterfly Spread Option entspricht also einer Long Call Option mit Strikepreis K_1 , zwei Short Call Optionen mit dem gleichen Strikepreis K_2 und einer Long Call Option mit Strikepreis K_3 :

$$V_{\text{Butterfly Spread}}(S, t; K_1, K_2, K_3) = V_{\text{Call}}(S, t; K_1) - 2V_{\text{Call}}(S, t; K_2) + V_{\text{Call}}(S, t; K_3)$$

Beispiel 8: Wert einer Butterfly Spread Option (2)



Bem. zur Bewertung von Butterfly Spread Optionen

Bemerkung:

- Eingesetzt wird eine Straddle Option z.B. dann, wenn der Käufer die Meinung vertritt, dass sich der zukünftige Marktpreis des Underlyings in der Nähe des Strikepreises K_2 befindet. Häufig entspricht dieser Preis dem aktuellen Preis.

Inhalt

- 1 Stochastische Prozesse
- 2 Itô Integral und stochastische Differentialgleichungen
- 3 Vom Random Walk zur Brownschen Bewegung

- 4 Die Annahmen im Black-Scholes Modell
- 5 Herleitung der Black-Scholes Gleichung
- 6 Allgemeine Lösung der B.-S. Gleichung für europäische Optionen

- 7 Die Put-Call Parität
- 8 Analytische Bewertung einiger europäischer Optionen

- 9 Binomialbaum Methode**
- 10 Weitere Finite Differenzen Methoden: Explizit, implizit, Crank-Nicolson
- 11 Vergleich der Finiten Differenzen Methoden und weitere Verfahren

Ausgangslage

Ziel:

Gesucht ist eine Lösung der Black-Scholes Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

für amerikanische Optionen oder Bermuda Optionen (oder europäische Optionen).
Bei Ausübung mögen diese Optionen das Auszahlungsprofil

$$\text{Payoff}(S(t)) = V(S(t), t)$$

besitzen.

Problem:

I.a. kann diese Lösung (außer für (einige) europäische Optionen) analytisch nicht bestimmt werden.

Lösung:

Benutzung numerischer Lösungsmethoden

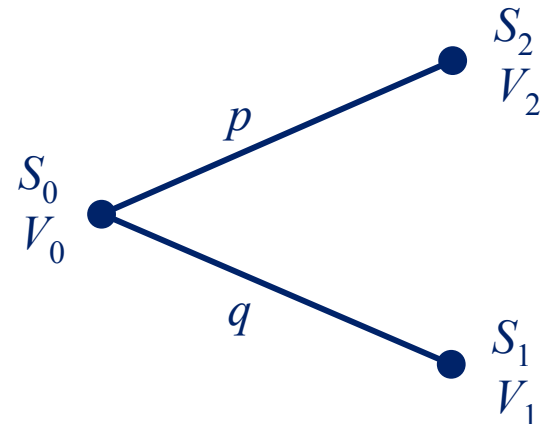
Idee des Binomialbaum Ansatzes

Idee:

Zur numerischen Lösung der Black-Scholes Gleichung benutze man, dass man die geometrische Brownsche Bewegung als Grenzwert des geometrischen Random Walks für Zeitschritte $\Delta t \rightarrow 0$ darstellen kann (siehe Kapitel 3).

Betrachte einen Binomialschritt:

- S_0 bezeichnet den Wert des Underlyings zur Zeit t , S_1 (mit Wahrscheinlichkeit q) und S_2 (mit $p = 1 - q$) bezeichnen die beiden möglichen Werte zur Zeit $t + \Delta t$
- V_0 bezeichnet den Wert der Option zur Zeit t , V_1 und V_2 bezeichnen die beiden möglichen Werte zur Zeit $t + \Delta t$



Konstruktion eines Hedge Portfolios

Konstruiere ein Hedge Portfolio, bestehend dem Δ -fachen des Underlyings (Long Position) und einer Short Position bzgl. der Option, d.h.

$$\Pi_0 = \Delta S_0 - V_0 \quad \text{zur Zeit } t. \quad (23)$$

Zur Zeit $t + \Delta t$ gilt dann

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \Delta S_1 - V_1 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } q \\ \Pi_2 &= \Delta S_2 - V_2 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } p \end{aligned} \quad (24)$$

Damit das Hedge Portfolio von $t \rightarrow t + \Delta t$ risikolos ist, muss Δ so gewählt werden, dass $\Pi_1 = \Pi_2$ gilt.

$$\Rightarrow \Delta = \frac{V_2 - V_1}{S_2 - S_1} \quad (25)$$

Bemerkung: Für $\Delta t \rightarrow 0$ geht (25) über in $\frac{\partial V}{\partial S}$, d.h. in das Δ aus der Herleitung der Black-Scholes Gleichung.

Die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit (1)

Ferner folgt aus der Forderung nach Risikofreiheit des Portfolios von $t \rightarrow t + \Delta t$, dass

$$e^{r\Delta t}\Pi_0 = \Pi_1 = \Pi_2 \quad (26)$$

gelten muss.

Aus (24) - (26) folgt $e^{r\Delta t}\Pi_0 = \frac{S_1V_2 - S_2V_1}{S_2 - S_1}$.

Einsetzen von (23): $V_0 = e^{-r\Delta t}(\tilde{p}V_2 + (1 - \tilde{p})V_1)$ (27)

$$\text{mit } \tilde{p} \equiv \frac{e^{r\Delta t}S_0 - S_1}{S_2 - S_1} \quad (28)$$

Bemerkung: Das No-Arbitrage Argument liefert $S_1 \leq e^{r\Delta t}S_0 \leq S_2$. Daher folgt

$$0 \leq \tilde{p} \leq 1 ,$$

d.h. \tilde{p} kann als Wahrscheinlichkeit interpretiert werden.

Die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit (2)

Interpretation des Zwischenergebnisses:

Das Ergebnis $V_0 = e^{-r\Delta t}(\tilde{p}V_2 + (1-\tilde{p})V_1)$ mit $0 \leq \tilde{p} \leq 1$ kann man derart interpretieren, dass der heutige Wert der Option dem abgezinnten Erwartungswertes des zukünftigen Optionswertes entspräche, wenn sich die Werte des Underlyings (und damit auch die der Option) mit der Wahrscheinlichkeit \tilde{p} anstelle von p entwickeln würden.

Definition:

Da \tilde{p} über die Forderung nach einem risikolosen Portfolio ermittelt wurde, wird \tilde{p} auch als **risikoneutrale Wahrscheinlichkeit** bezeichnet.

Es gilt (s. unten): $p > \tilde{p}$

Die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit (3)

Von der Überleitung des geom. Random Walks in die geom. Brownsche Bewegung wissen wir, dass für die Wertveränderung des Underlyings während eines Zeitschrittes

$$S_2 = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} S_0, \quad S_1 = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} S_0 \quad (29)$$

und

$$p \equiv \frac{e^{\mu\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} \quad (30)$$

gelten.

Einsetzen von (29) in (28) liefert

$$\tilde{p} \equiv \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} \quad (31)$$

Bemerkungen:

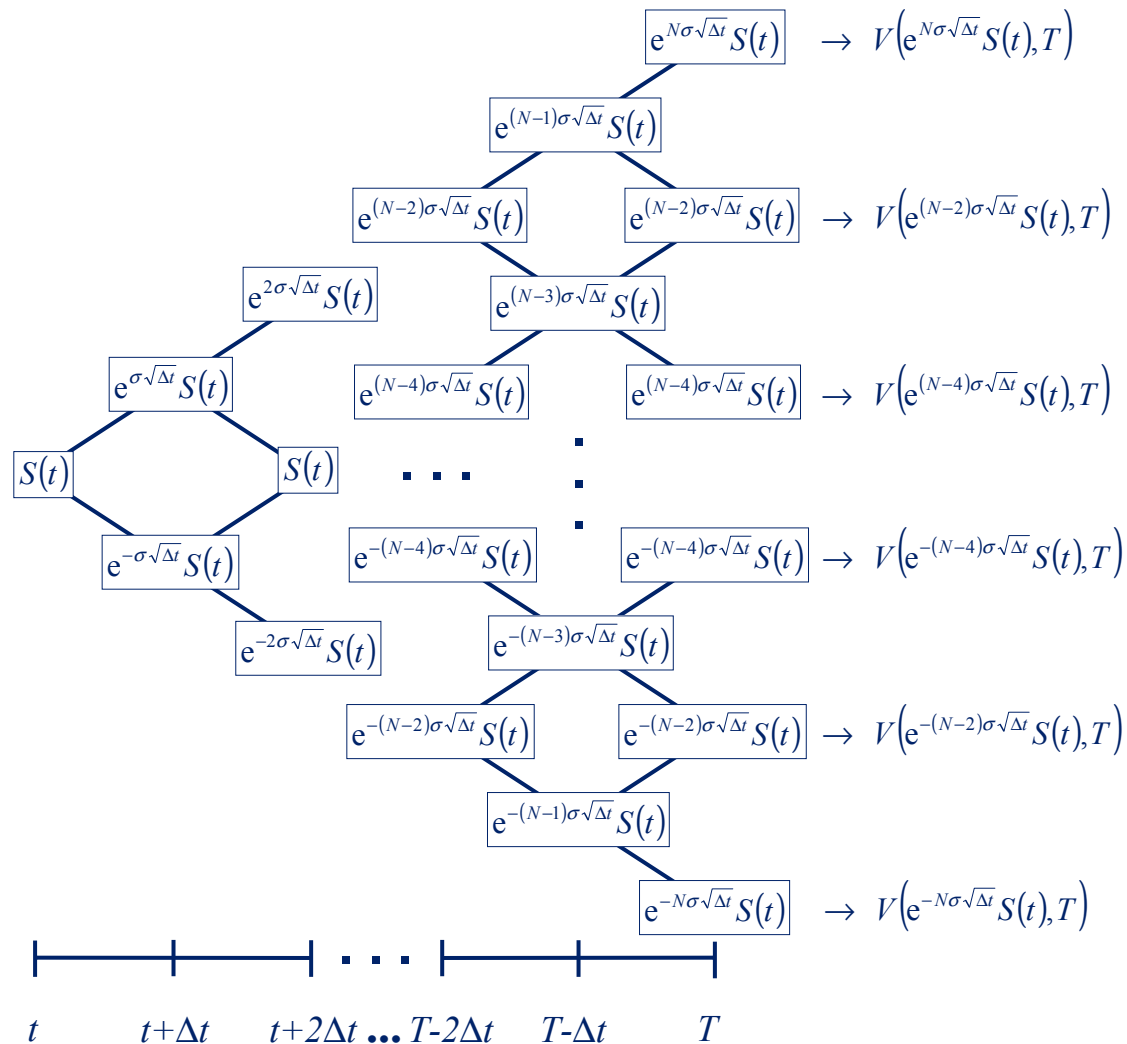
- I.a. ist der zu einem (risikobehafteten) Underlying gehörende Drift μ größer als die risikolose Zinsrate r . Somit folgt aus (30) und (31), dass $p > \tilde{p}$ gilt.
- Aus dem Vergleich von (30) und (31) wird die Bezeichnung von \tilde{p} als risikoneutrale Wahrscheinlichkeit noch klarer.

Die Binomialbaum Methode

Vorgehen zur Bestimmung von $V(S(t),t)$:

- (i) Unterteile $T - t$ in N äquidistante Zeitschritte der Länge Δt , d.h. $T - t = N \Delta t$.
- (ii) Berechne auf dem Binomialbaum mittels Gl. (29) die Wertentwicklung des Underlyings für die Zeitpunkte $t + \Delta t, t + 2\Delta t, \dots, t + N\Delta t = T$.
- (iii) Berechne zur Zeit T die durch das Auszahlungsprofil bekannten Werte von V für die erforderlichen $N + 1$ Werte des Underlyings, d.h. für $e^{N\sigma\sqrt{\Delta t}}S(t), e^{(N-2)\sigma\sqrt{\Delta t}}S(t), e^{(N-4)\sigma\sqrt{\Delta t}}S(t), \dots, e^{-N\sigma\sqrt{\Delta t}}S(t)$.
- (iv) Berechne mittels Gl. (27) und (31) in rückwärtiger Zeitrichtung die Optionspreise sukzessive für $T - \Delta t, T - 2\Delta t, \dots, T - N\Delta t = t$, um schließlich $V(S(t),t)$ zu erhalten.

Visualisierung der Binomialbaum Methode (1)



Anwendung der Binomialbaum Methode (1)

Um die Binomialbaum Methode zu testen, berechnen wir einen bekannten, d.h. analytisch exakt bestimmmbaren Optionswert.

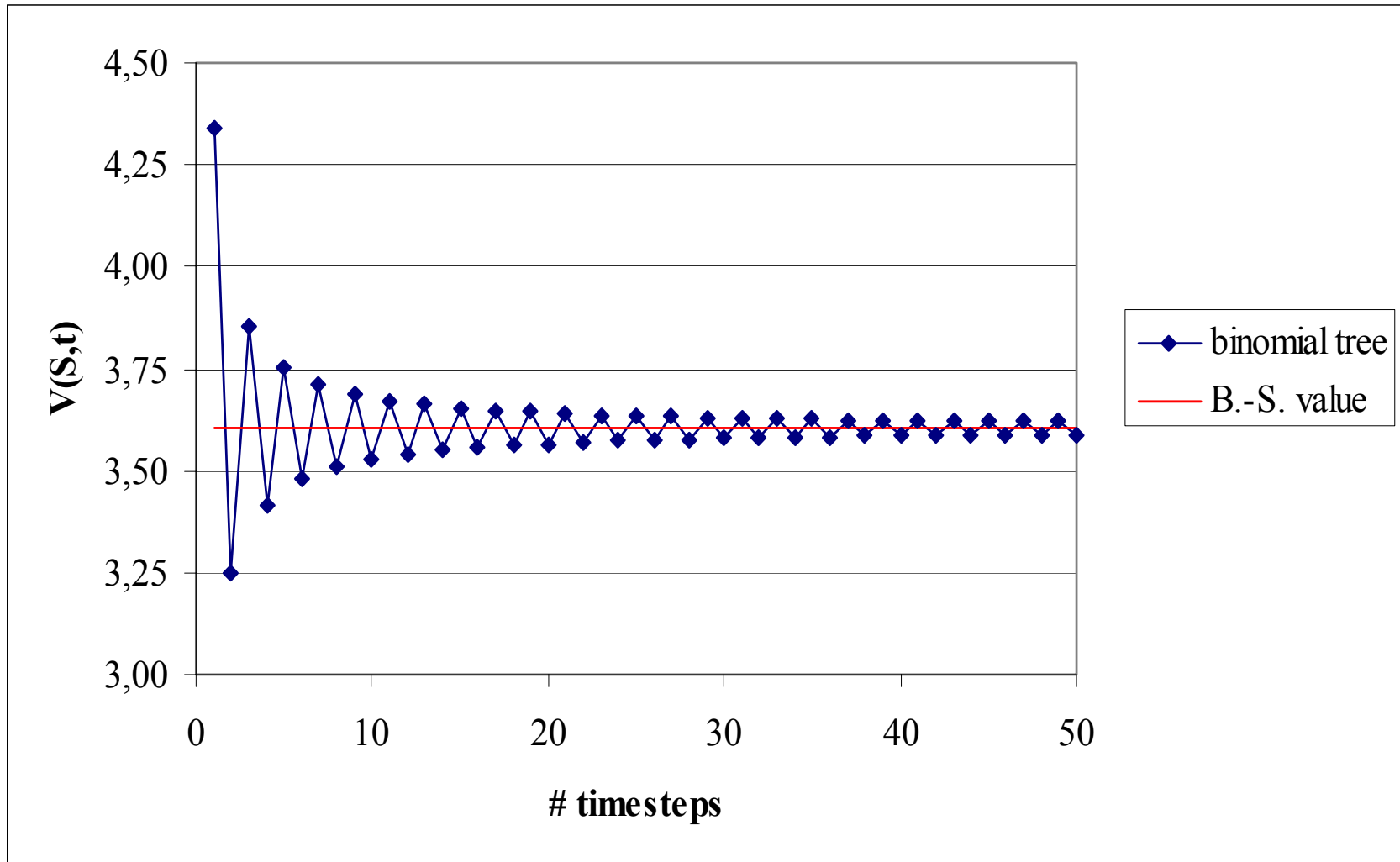
Betrachte:

Optionstyp:	Plain Vanilla Call Option (Long)
Ausübungsart:	europäisch
Volatilität:	40%
risikofreier Zinssatz:	5%
Spotpreis:	20
Strikepreis:	20
Restlaufzeit:	1 Jahr

⇒ exakter Wert der Option nach Black-Scholes: 3,6045903

Die numerischen Werte sind ...

Anwendung der Binomialbaum Methode (3)

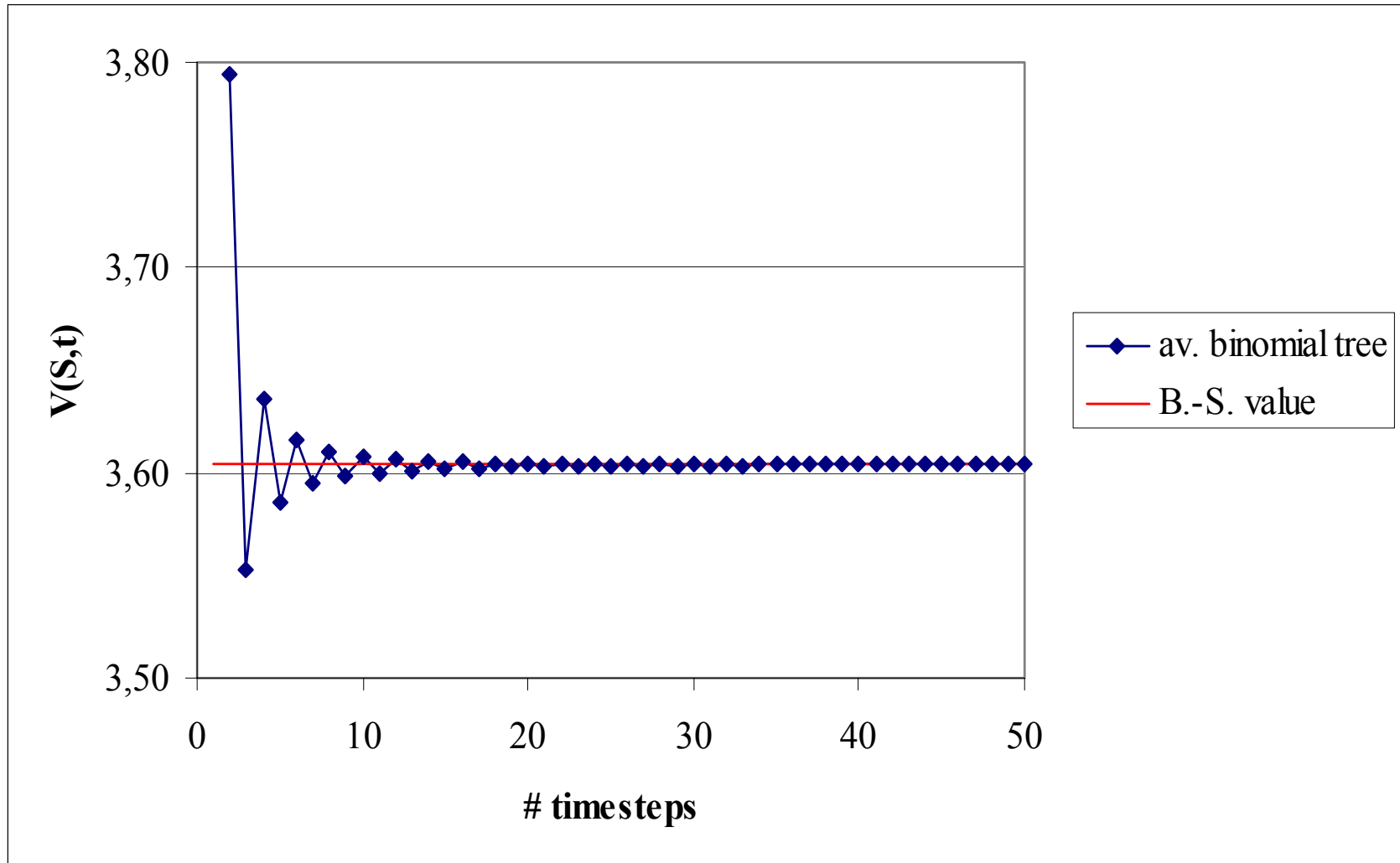


Bemerkungen zur Binomialbaum Methode

- Das Ergebnis wird mit zunehmender Anzahl Iterationsschritten genauer.
- ABER:
Durch die Art der Diskretisierung oszillieren die numerischen Werte um den exakten Wert.
- Verbesserung:
Mittelwertbildung der numerischen Ergebnisse, d.h.

$$V_{\text{num., average}}(i) = \frac{1}{2} (V_{\text{num.}}(i) + V_{\text{num.}}(i-1)) \quad \text{für } i = 2, \dots, N.$$

Verbesserte Binomialbaum Methode



Berücksichtigung frühzeitiger Ausübung

In der bisherigen Diskussion wurden nur europäische Optionstypen betrachtet. Für amerikanischen Optionen oder Bermudaoptionen muss zusätzlich das **Recht auf frühzeitige Ausübung** berücksichtigt werden. Dies geschieht durch eine Modifikation von Schritt (iv) der Binomialbaum Methode:

(iv') Berechne mittels

$$V_0 = \max \left\{ e^{-r \Delta t} (\tilde{p} V_2 + (1 - \tilde{p}) V_1), \text{Payoff}(S_0) \right\} \quad (27')$$

und Gleichung (31) in rückwärtiger Zeitrichtung die Optionspreise sukzessive für $T - \Delta t, T - 2\Delta t, \dots, T - N\Delta t = t$, um schließlich $V(S(t), t)$ zu erhalten.

M.a.W.:

Um Arbitrage zu verhindern, muss zu jedem Zeitpunkt, an dem eine vorzeitige Ausübung erlaubt ist, der „europäisch“ berechnete Wert der Option verglichen werden mit dem Erlös, der bei sofortiger Ausübung bzgl. dem zu diesem Zeitpunkt berechneten Preis des Underlyings erzielt werden könnte.

Inhalt

- 1 Stochastische Prozesse
- 2 Itô Integral und stochastische Differentialgleichungen
- 3 Vom Random Walk zur Brownschen Bewegung

- 4 Die Annahmen im Black-Scholes Modell
- 5 Herleitung der Black-Scholes Gleichung
- 6 Allgemeine Lösung der B.-S. Gleichung für europäische Optionen

- 7 Die Put-Call Parität
- 8 Analytische Bewertung einiger europäischer Optionen

- 9 Binomialbaum Methode
- 10 Weitere Finite Differenzen Methoden: Explizit, implizit, Crank-Nicolson
- 11 Vergleich der Finiten Differenzen Methoden und weitere Verfahren

Diskretisierung einer Ableitung erster Ordnung (1)

Die (oder besser: eine mögliche) Definition der partiellen Ableitung ist gegeben durch

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} .$$

Für numerische Rechnungen in diskreter Zeit wird daher die Ableitung durch den Differenzenquotienten ersetzt:

$$\begin{array}{l} \text{Zeit kontinuierlich} \rightarrow \text{Zeit diskret} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \rightarrow \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \end{array}$$

Die Größenordnung des Diskretisierungsfehlers erhält man über den Satz von Taylor:

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y) &= f(x, y) + \Delta x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + O((\Delta x)^2) \\ \Rightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} + O(\Delta x) \end{aligned}$$

Diskretisierung einer Ableitung erster Ordnung (2)

Mit denselben Argumenten folgt

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{f(x, y) - f(x - \Delta x, y)}{\Delta x} + O(\Delta x) .$$

Der arithmetische Mittelwert aus beiden Approximationen gibt

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x - \Delta x, y)}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) ,$$

wobei die Größenordnung des Fehlers wiederum aus dem Satz von Taylor folgt.

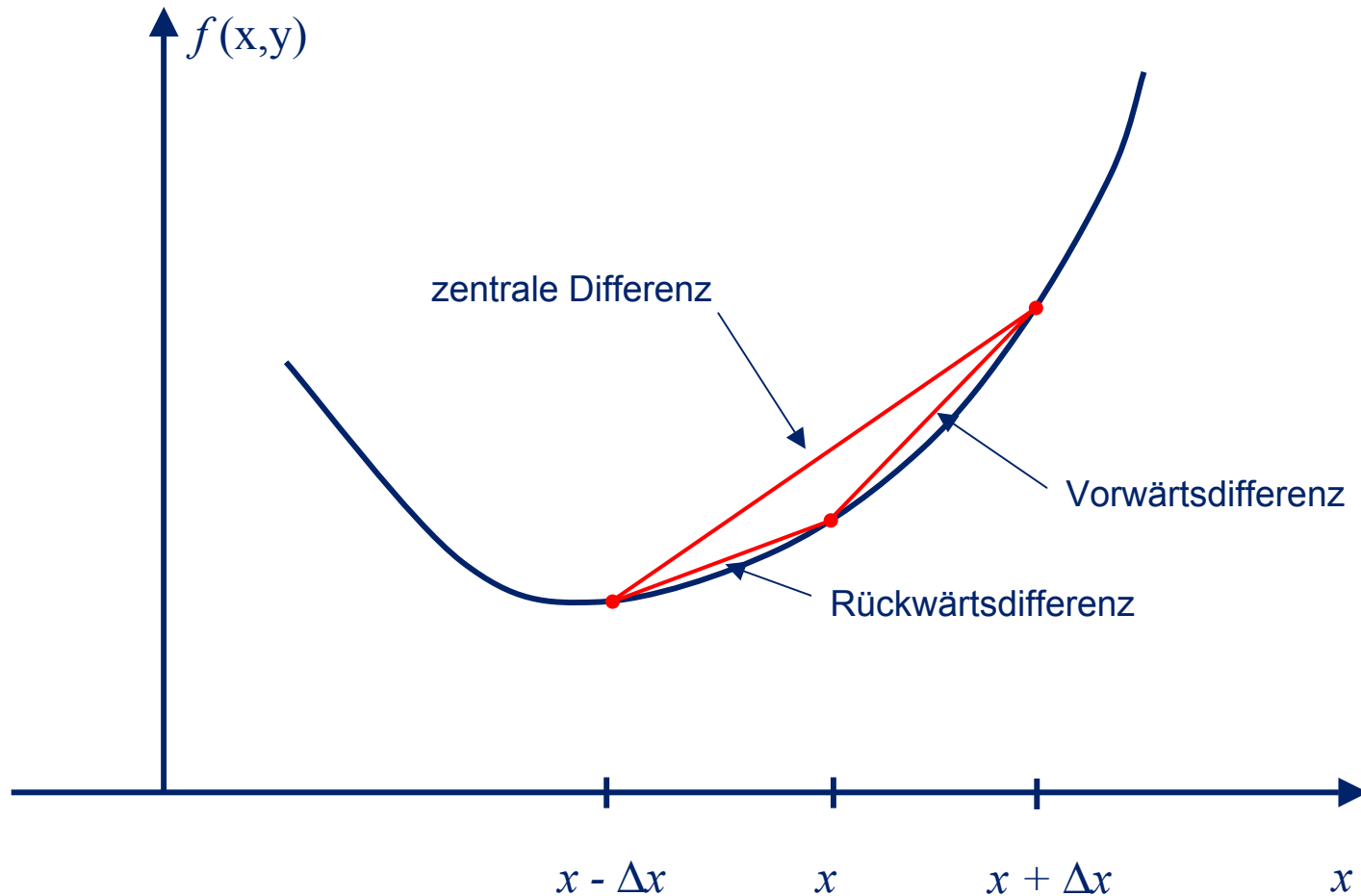
Diskretisierung einer Ableitung erster Ordnung (3)

Definition:

Die Approximation von $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ durch

- $\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$ heißt **Vorwärtsdifferenz**.
- $\frac{f(x, y) - f(x - \Delta x, y)}{\Delta x}$ heißt **Rückwärtsdifferenz**.
- $\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x - \Delta x, y)}{2\Delta x}$ heißt **zentrale Differenz**.

Diskretisierung einer Ableitung erster Ordnung (4)



Diskretisierung einer Ableitung zweiter Ordnung

Analog zur Diskretisierung der partiellen Ableitung erster Ordnung folgt für die partielle Ableitung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{f(x + \Delta x, y) - 2f(x, y) + f(x - \Delta x, y)}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2).$$

Idee der Finiten Differenzen Methoden

Idee:

Der Lösung einer partiellen DGL mittels finiten Differenzen liegt die Idee zugrunde, die **Differential- in eine Differenzengleichung zu transformieren**.

- Dazu werden die Definitionsbereiche sämtlicher Variablen diskretisiert, so dass jede Variable nur noch auf einem Raster von in der Regel äquidistanten Abständen existiert.
- Lösungen zu Variablen- n -tupeln (Black-Scholes DGL: Variablenpaaren), die nicht auf diesem Gitter definiert sind, erhält man durch n -dimensionale Interpolation der diskreten Lösungen.
- Es muss sichergestellt werden, dass man den Einfluss der Diskretisierung auf das Endergebnis abschätzen kann.

Diskretisierung der Spotpreis- und Zeit-Achsen

Anwendung der finiten Differenzen Methode auf die Black-Scholes Differentialgleichung:

Diskretisierung der Spotpreis-Achse:

Die B.-S. DGL muss für $0 \leq S < \infty$ gelöst werden. Da dies auf einem endlichen Gitter nicht möglich ist, schränkt man den Definitionsbereich von S ein auf $0 \leq S \leq S_{\max}$. Dabei muss S_{\max} so gewählt werden, dass es deutlich größer als der Strikepreis K der betrachteten Option ist, $S_{\max} \gg K$.

Schließlich unterteilt man das Intervall $[0, S_{\max}]$ in N Intervalle der Länge $\Delta S = \frac{S_{\max}}{N}$.

Diskretisierung der Zeit-Achse:

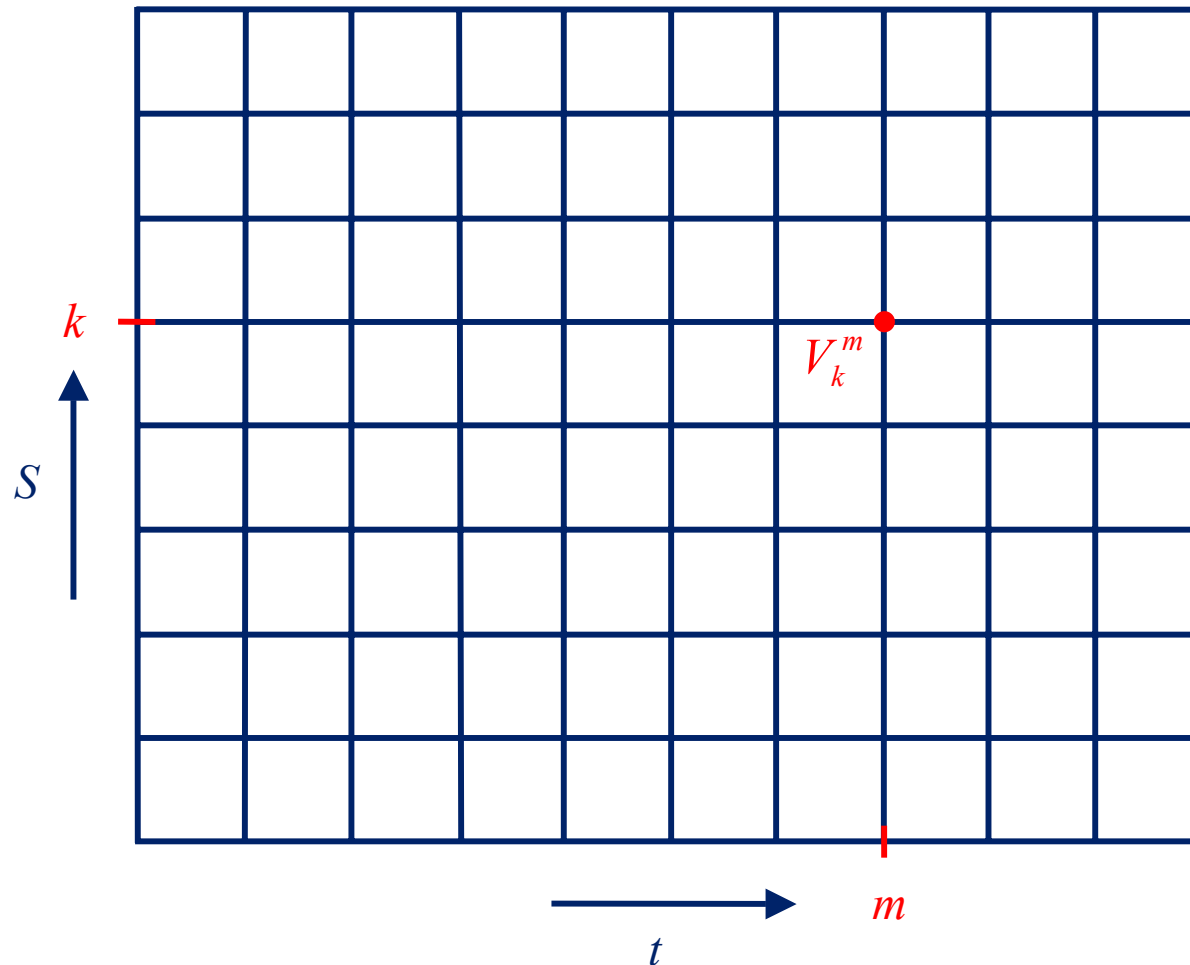
Die B.-S. DGL muss von der Startzeit t bis zur Verfallzeit T gelöst werden.

Man unterteilt man das Intervall $[t, T]$ in M Intervalle der Länge $\Delta t = \frac{T-t}{M}$.

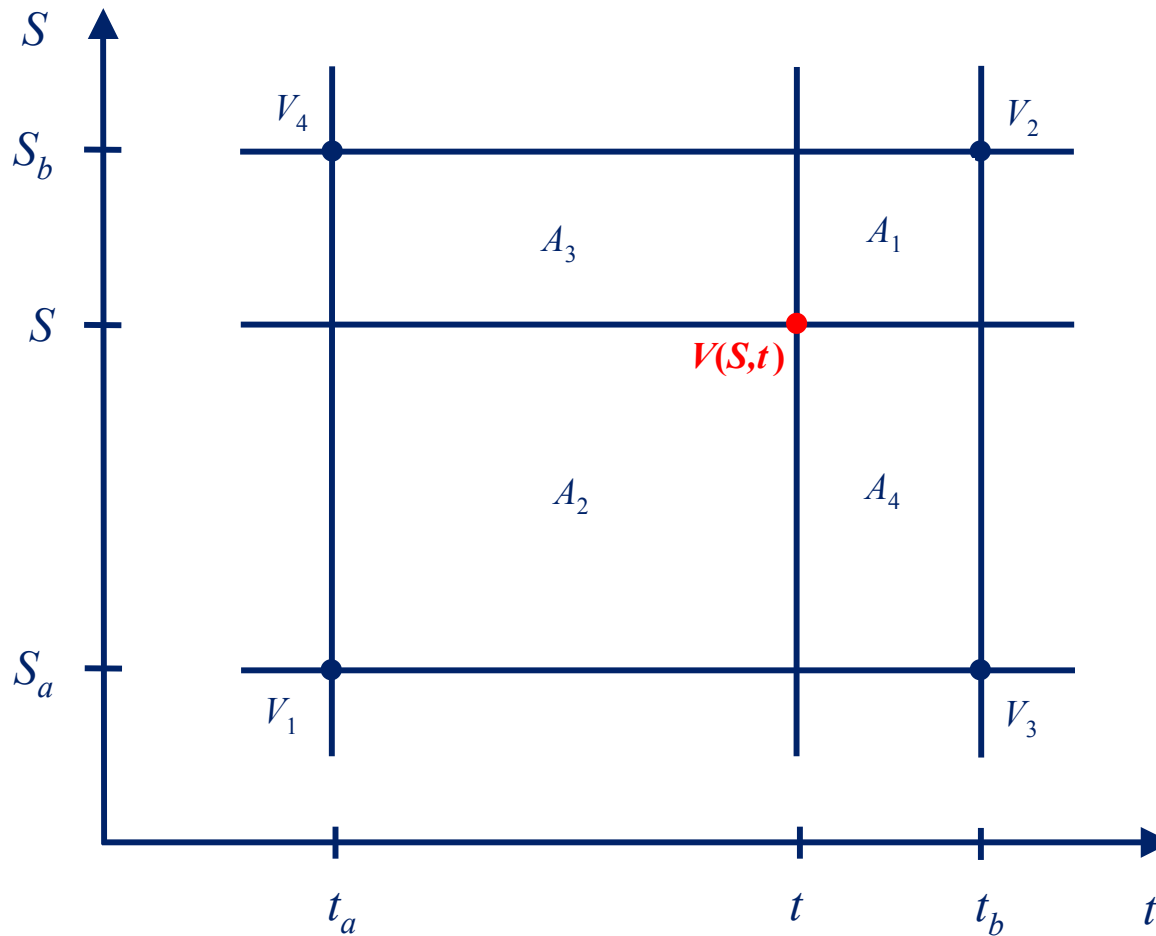
Bezeichnung:

$$V_k^m \equiv V(k \Delta S, t + m \Delta t) \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, N \text{ und } m = 0, 1, \dots, M$$

Das Finite Differenzen Gitter



Bilineare Interpolation (1)



Bilineare Interpolation (2)

Die bilineare Interpolation entspricht einer zweimaligen Anwendung der linearen Interpolation.

Bekannt sind $V_1 \equiv V(S_a, t_a)$, $V_2 \equiv V(S_b, t_b)$, $V_3 \equiv V(S_a, t_b)$, $V_4 \equiv V(S_b, t_a)$.
Gesucht ist $V(S, t)$ mit $S_a < S < S_b$ und $t_a < t < t_b$.

1. Schritt: Interpolation in t -Richtung

$$V_5 \equiv V(S_a, t) = V_1 + \frac{(t-t_a)}{t_b-t_a}(V_3 - V_1) = \frac{(t-t_a)V_3 - (t-t_b)V_1}{t_b-t_a}$$

analog:

$$V_6 \equiv V(S_b, t) = \frac{(t-t_a)V_2 - (t-t_b)V_4}{t_b-t_a}$$

Bilineare Interpolation (3)

2. Schritt: Interpolation in S -Richtung

$$\begin{aligned}
 V(S, t) &= V_5 + \frac{(S - S_a)}{S_b - S_a} (V_6 - V_5) = \frac{(S - S_a)V_6 - (S - S_b)V_5}{S_b - S_a} \\
 &= \frac{(S_b - S)(t_b - t)V_1 + (S - S_a)(t - t_a)V_2 + (S_b - S)(t - t_a)V_3 + (S - S_a)(t_b - t)V_4}{(S_b - S_a)(t_b - t_a)}
 \end{aligned}$$

Erhalte als Ergebnis

$$V(S, t) = \frac{\sum_{i=1}^4 A_i V_i}{\sum_{i=1}^4 A_i},$$

d.h. analog zur eindimensionalen Interpolation entspricht das Ergebnis der zweidimensionalen Interpolation einem gewichteten Mittelwert. Dabei entsprechen die Gewichte den Flächenanteilen.

Diskretisierung der B.-S. DGL mittels expliziter Finiter Differenzen Methode (1)

In der Black-Scholes Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

werden bei der expliziten Methode die drei partiellen Ableitungen wie folgt ersetzt:

$$\begin{aligned} 1.) \quad \frac{\partial V}{\partial t}(k \Delta S, t + m \Delta t) &= \frac{V(k \Delta S, t + m \Delta t) - V(k \Delta S, t + (m-1) \Delta t)}{\Delta t} + O(\Delta t) \\ &= \frac{V_k^m - V_k^{m-1}}{\Delta t} + O(\Delta t) \end{aligned}$$

d.h. die zeitliche Ableitung wird durch eine **Rückwärtsdifferenz** approximiert.

Diskretisierung der B.-S. DGL mittels expliziter Finiter Differenzen Methode (2)

$$\begin{aligned}
 2.) \quad \frac{\partial V}{\partial S}(k \Delta S, t + m \Delta t) &= \frac{V((k+1)\Delta S, t + m \Delta t) - V((k-1)\Delta S, t + m \Delta t)}{2 \Delta S} + O((\Delta S)^2) \\
 &= \frac{V_{k+1}^m - V_{k-1}^m}{2 \Delta S} + O((\Delta S)^2)
 \end{aligned}$$

d.h. die erste Ableitung nach dem Spotpreis wird durch eine zentrale Differenz approximiert.

3.) Analog approximiert man die zweite Ableitung nach dem Spotpreis durch

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(k \Delta S, t + m \Delta t) = \frac{V_{k+1}^m - 2V_k^m + V_{k-1}^m}{(\Delta S)^2} + O((\Delta S)^2).$$

Diskretisierung der B.-S. DGL mittels expliziter Finiter Differenzen Methode (3)

Unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung folgt aus der Black-Scholes Gleichung durch Einsetzen von 1.) - 3.)

$$\frac{V_k^m - V_k^{m-1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \sigma^2 (k \Delta S)^2 \frac{V_{k+1}^m - 2V_k^m + V_{k-1}^m}{(\Delta S)^2} + rk \Delta S \frac{V_{k+1}^m - V_{k-1}^m}{2 \Delta S} - rV_k^m = 0 \quad (32)$$

Umformung liefert:

$$V_k^{m-1} = A_k V_{k-1}^m + B_k V_k^m + C_k V_{k+1}^m \quad (33)$$

$$\text{mit } A_k \equiv \frac{\Delta t}{2} (\sigma^2 k^2 - rk) \quad (34 \text{ a})$$

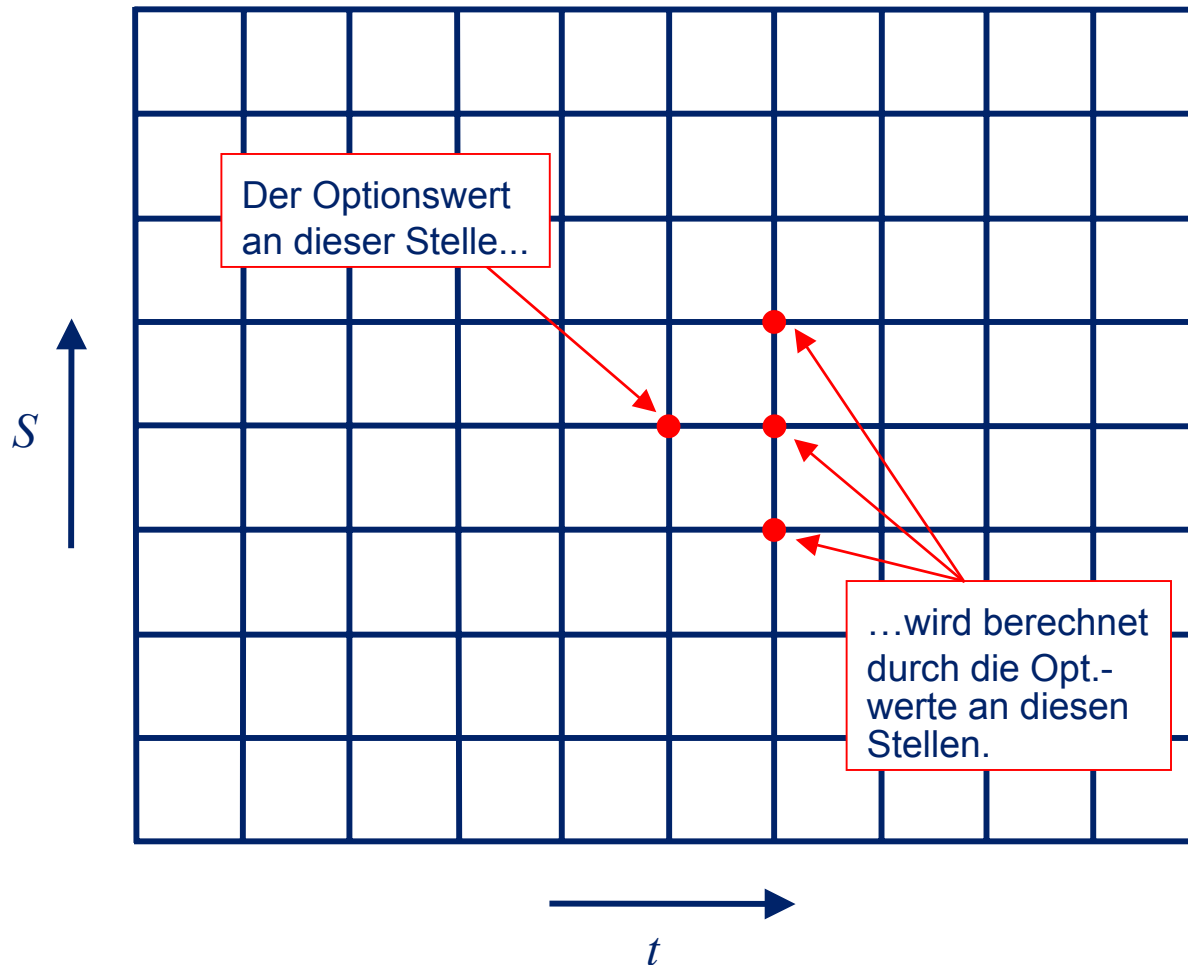
$$B_k \equiv 1 - \Delta t (\sigma^2 k^2 + r) \quad (34 \text{ b})$$

$$C_k \equiv \frac{\Delta t}{2} (\sigma^2 k^2 + rk) \quad (34 \text{ c})$$

für $m = 1, \dots, M$
und $k = 0, 1, \dots, N-1, (N)$

Spezialfälle

Die explizite Finite Differenzen Methode



Spezialfälle der Diskretisierung der B.-S. DGL mittels expliziter Finiter Differenzen Methode (1)

Fall 1: $k = 0$

Die Berechnungsvorschrift lautet in diesem Fall $V_0^{m-1} = A_0 V_{-1}^m + B_0 V_0^m + C_0 V_1^m$. Der Wert V_{-1}^m liegt *außerhalb* des durch die Diskretisierung vorgegebenen Definitionsbereiches. Da jedoch $A_0 = 0$ gilt, muss die Berechnungsvorschrift für $k = 0$ nicht modifiziert werden.

Konsistenzcheck:

Mit $B_0 = 1 - r \Delta t$ und $C_0 = 0$ folgt $V_0^{m-1} = (1 - r \Delta t) V_0^m$.

$$\Rightarrow \frac{V_0^m - V_0^{m-1}}{\Delta t} - r V_0^m = 0$$

Andererseits lautet die B.-S. DGL für $S = 0$: $\frac{\partial V}{\partial t} - rV = 0$ ✓

Spezialfälle der Diskretisierung der B.-S. DGL mittels expliziter Finiter Differenzen Methode (2)

Fall 2: $k = N$

Die Berechnungsvorschrift lautet jetzt $V_N^{m-1} = A_N V_{N-1}^m + B_N V_N^m + C_N V_{N+1}^m$.

In diesem Fall liegt der Wert V_{N+1}^m *außerhalb* des durch die Diskretisierung vorgegebenen Definitionsbereiches.

Lösung:

Die Wahl von N war derart, dass $N \Delta S = S_{\max} \gg K$ ist. Man benutze daher das bekannte Verhalten des Optionswertes für $S \rightarrow \infty$.

Z.B. gilt für viele Optionen $\left. \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right|_{S \rightarrow \infty} = 0$. (Gegenbeispiel: Power Optionen \rightarrow liefern andere Bedingung)

Übertragung auf das Gitter liefert $\frac{V_{N+1}^m - 2V_N^m + V_{N-1}^m}{(\Delta S)^2} = 0$.

$$\Rightarrow V_{N+1}^m = 2V_N^m - V_{N-1}^m$$

Spezialfälle der Diskretisierung der B.-S. DGL mittels expliziter Finiter Differenzen Methode (3)

Einsetzen in die Berechnungsvorschrift liefert

$$V_N^{m-1} = A_N V_{N-1}^m + B_N V_N^m + C_N (2V_N^m - V_{N-1}^m).$$

$$\Rightarrow V_N^{m-1} = (A_N - C_N) V_{N-1}^m + (B_N + 2C_N) V_N^m$$

Als Endergebnis folgt:

$$V_N^{m-1} = A_N^* V_{N-1}^m + B_N^* V_N^m \quad (35)$$

$$\text{mit } A_N^* \equiv -r \Delta t N \quad (36 \text{ a})$$

$$B_N^* \equiv 1 + r \Delta t (N - 1) \quad (36 \text{ b})$$

Das Stabilitätskriterium

Bei der numerischen Lösung der B.-S. DGL mit Hilfe der expliziten finiten Differenzen Methode zeigt sich, dass das Lösungsverfahren numerisch instabil wird, falls einer der Koeffizienten $B_k < 0$ wird.

Anschauliche Begründung:

Falls $r = 0$ gilt, folgt $A_k \equiv \frac{\Delta t}{2} \sigma^2 k^2$, $B_k \equiv 1 - \Delta t \sigma^2 k^2$, $C_k \equiv \frac{\Delta t}{2} \sigma^2 k^2$.

Zusammen mit der Berechnungsvorschrift $V_k^{m-1} = A_k V_{k-1}^m + B_k V_k^m + C_k V_{k+1}^m$ folgt, dass man die Koeffizienten als Wahrscheinlichkeiten innerhalb eines Trinomialmodells auffassen kann.

Da die B_k für wachsendes k monoton fallen, reicht es aus, für einen numerisch stabilen Algorithmus zu fordern, dass $B_{N-1} > 0$ gilt.

Stabilitätskriterium:

Die Unterteilung des Gitters (also M und N) muss so gewählt sein, dass

$$\Delta t < \frac{1}{\sigma^2 (N-1)^2} \quad (37)$$

gilt.

Berücksichtigung frühzeitiger Ausübung

Analog zur Binomialbaum Methode wird auch bei der expliziten Finite Differenzen Methode das Recht auf frühzeitige Ausübung durch eine Modifikation der Berechnungsvorschrift berücksichtigt:

$$V_k^{m-1} = \max \left\{ A_k V_{k-1}^m + B_k V_k^m + C_k V_{k+1}^m, \text{Payoff}(k \Delta S) \right\} \quad (33')$$

und

$$V_N^{m-1} = \max \left\{ A_N^* V_{N-1}^m + B_N^* V_N^m, \text{Payoff}(N \Delta S) \right\} \quad (35')$$

Die explizite Finite Differenzen Methode

Zusammenfassung: Die explizite Finite Differenzen Methode

- (i) Lege ein $S_{\max} \gg K$ fest. Unterteile $[0, S_{\max}]$ in N äquidistante Preisschritte der Länge ΔS , d.h. $S_{\max} = N \Delta S$.
- (ii) Unterteile $[t, T]$ in M äquidistante Zeitschritte der Länge Δt , d.h. $T - t = M \Delta t$, so dass das Stabilitätskriterium Gl. (37) erfüllt ist.
- (iii) Berechne zur Zeit T die durch das Auszahlungsprofil bekannten Werte von V_k^M für die auf dem Gitter definierten $N + 1$ Werte des Underlyings, also für $k = 0, 1, \dots, N$.
- (iv) Berechne mittels Gl. (33) bis (36) (für europäische Optionen) bzw. (33'), (34), (35') und (36) (für amerikanische Optionen oder Bermuda Optionen) in rückwärtiger Zeitrichtung die Optionspreise V_k^m sukzessive für $T - \Delta t, T - 2\Delta t, \dots, T - N\Delta t = t$, d.h. für $m = M - 1, M - 2, \dots, 1, 0$ und für alle $k = 0, 1, \dots, N$.

Genauigkeit der expliziten Finiten Differenzen Methode (1)

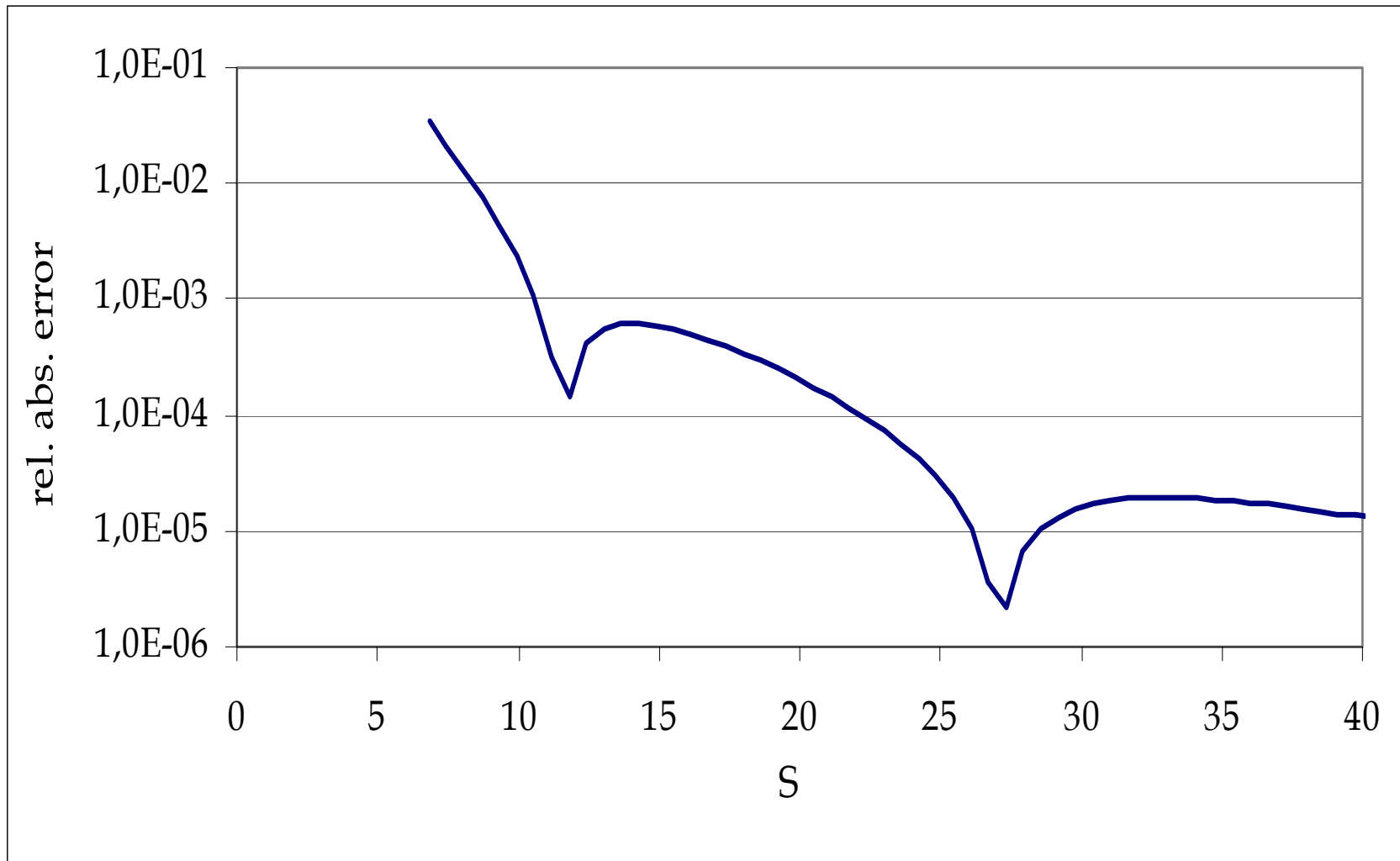
Um die Auswirkungen der Diskretisierungsfehler $O(\Delta t, (\Delta S)^2)$ auf die mit Hilfe der expliziten Finiten Differenzen Methode erzielten Ergebnisse zu testen, berechnen wir bekannte, d.h. analytisch exakt bestimmbare Optionswerte, und vergleichen diese mit den numerisch bestimmten Werten.

Betrachte:

Optionstyp:	Plain Vanilla Call Option (Long)
Ausübungsart:	europäisch
Volatilität:	40%
risikofreier Zinssatz:	5%
Spotpreis:	0 - 40 (für Algorithmus: $S_{\max} = 100$)
Strikepreis:	20
Restlaufzeit:	1 Jahr

Die Absolutwerte der relativen Abweichungen $\frac{|V_{\text{P. V. Call, num.}} - V_{\text{P. V. Call, anal.}}|}{V_{\text{P. V. Call, anal.}}}$ sind für $V_{\text{P. V. Call, anal.}} \geq 0,005 \dots$

Genauigkeit der expliziten Finiten Differenzen Methode (2)



Vor- und Nachteile der expliziten Finiten Differenzen Methode

Vorteile:

- Die explizite Finite Differenzen Methode ist einfach umsetzbar, d.h. einfach zu programmieren.
- Sobald die Methode numerisch instabil wird, ist dies anhand der Werte offensichtlich.
- Man erhält $V(S,t)$ bei einer Gitterberechnung für alle Werte in $[t,T] \times [0, S_{\max}]$.
- Die im Risikomanagement wichtigen Sensitivitäten $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$, $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ und $\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$ können sehr leicht berechnet werden.

Nachteil:

- Aufgrund des Stabilitätskriteriums ist eine sehr feine Untergliederung der Zeitachse erforderlich. Die explizite Finite Differenzen Methode kann daher langsamer als andere Verfahren sein.

Europäische vs. amerikanische Optionen

Als einfache Anwendung der expliziten Finiten Differenzen Methode werden Plain Vanilla Call und Put Optionen mit amerikanischer Ausübung berechnet und mit den (analytisch exakt berechenbaren) Werten für die analogen Optionen europäischer Ausprägung verglichen.

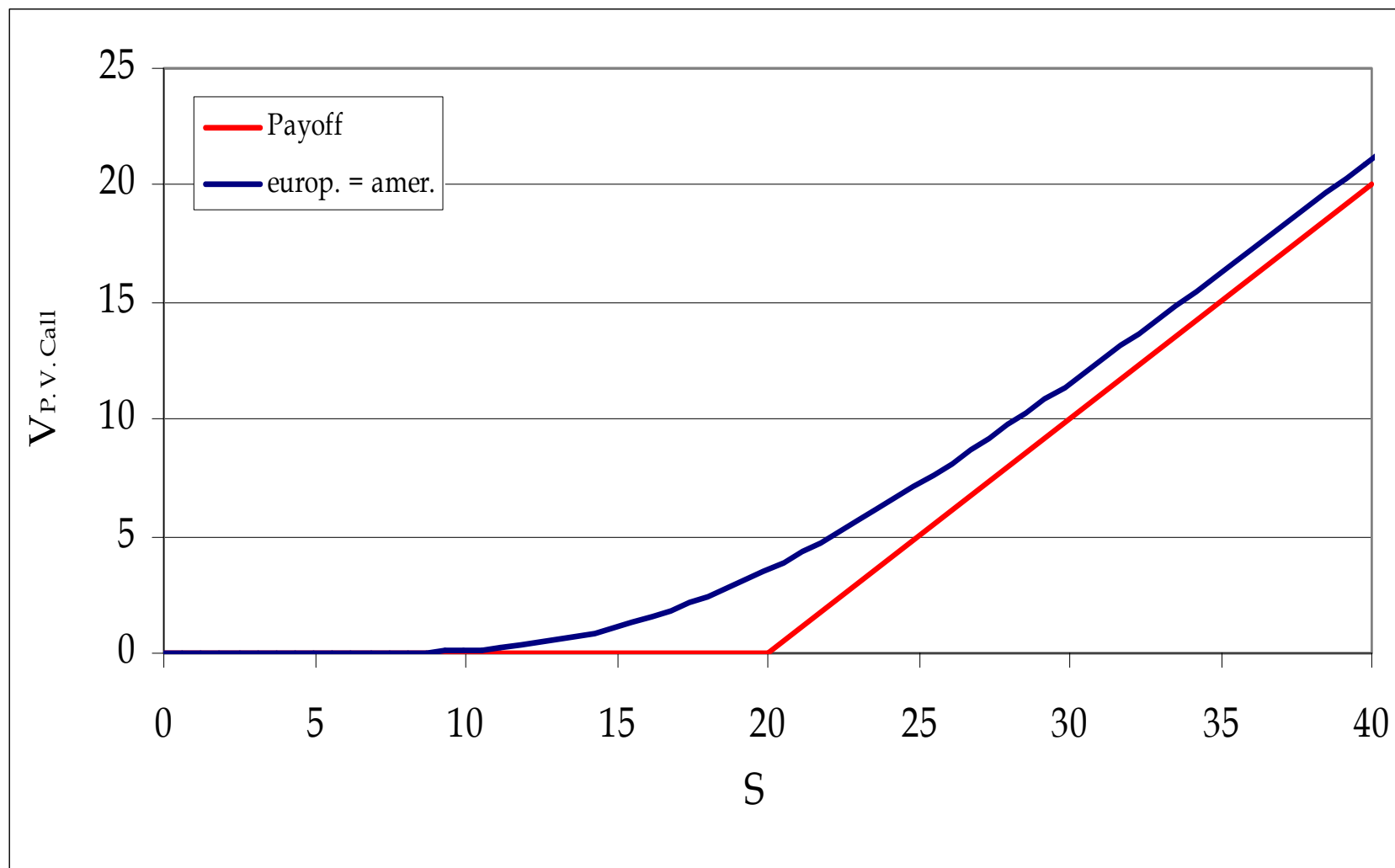
Betrachte:

Optionstyp: Beispiel 1: Plain Vanilla Call Option (Long)
 Beispiel 2: Plain Vanilla Put Option (Long)

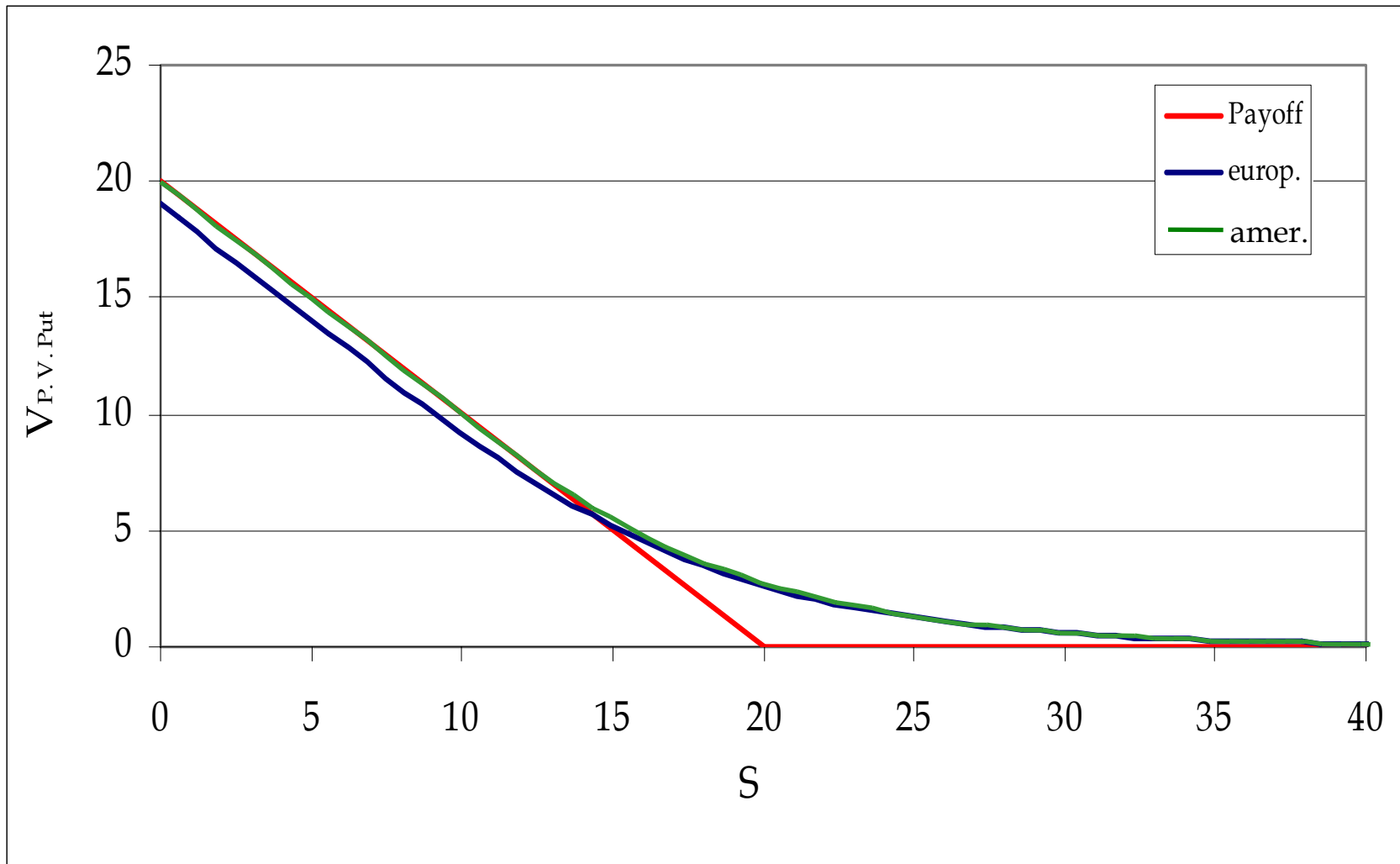
Ausübungsart: amerikanisch und europäisch

Volatilität: 40%
risikofreier Zinssatz: 5%
Spotpreis: 0 - 40 (für Algorithmus: $S_{\max} = 100$)
Strikepreis: 20
Restlaufzeit: 1 Jahr

Beispiel 1: Plain Vanilla Call Option (europ. / amer.)



Beispiel 2: Plain Vanilla Put Option (europ. / amer.)



Diskretisierung der B.-S. DGL mittels impliziter Finiter Differenzen Methode (1)

Der Ansatz zur Lösung der Black-Scholes Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

mit Hilfe der impliziten Methode unterscheidet sich nur in einem einzigen Punkt von dem Ansatz der expliziten Methode:

Während die Ableitungen nach dem Spotpreis durch dieselben Differenzen wie bei der expliziten Methode ersetzt werden, wird die zeitliche Ableitung bei der impliziten Methode durch eine **Vorwärtsdifferenz** approximiert.

Diskretisierung der B.-S. DGL mittels impliziter Finiter Differenzen Methode (2)

Wir betrachten im folgenden als Ausgangspunkt $(k \Delta S, t + (m - 1) \Delta t)$ [statt wie im expliziten Fall $(k \Delta S, t + m \Delta t)$]. Dann gelten:

$$1.) \quad \frac{\partial V}{\partial t}(k \Delta S, t + (m - 1) \Delta t) = \frac{V_k^m - V_k^{m-1}}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$2.) \quad \frac{\partial V}{\partial S}(k \Delta S, t + (m - 1) \Delta t) = \frac{V_{k+1}^{m-1} - V_{k-1}^{m-1}}{2 \Delta S} + O((\Delta S)^2)$$

$$3.) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(k \Delta S, t + (m - 1) \Delta t) = \frac{V_{k+1}^{m-1} - 2V_k^{m-1} + V_{k-1}^{m-1}}{(\Delta S)^2} + O((\Delta S)^2).$$

Diskretisierung der B.-S. DGL mittels impliziter Finiter Differenzen Methode (3)

Analog zur expliziten Methode folgt wiederum durch Einsetzen von 1.) - 3.) in die Black-Scholes Gleichung unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung

$$\frac{V_k^m - V_k^{m-1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \sigma^2 (k \Delta S)^2 \frac{V_{k+1}^{m-1} - 2V_k^{m-1} + V_{k-1}^{m-1}}{(\Delta S)^2} + rk \Delta S \frac{V_{k+1}^{m-1} - V_{k-1}^{m-1}}{2 \Delta S} - rV_k^{m-1} = 0 \quad (38)$$

Umformung liefert:

$$a_k V_{k-1}^{m-1} + b_k V_k^{m-1} + c_k V_{k+1}^{m-1} = V_k^m \quad (39)$$

$$\text{mit } a_k \equiv -\frac{\Delta t}{2} (\sigma^2 k^2 - rk) \quad (40 \text{ a})$$

$$b_k \equiv 1 + \Delta t (\sigma^2 k^2 + r) \quad (40 \text{ b})$$

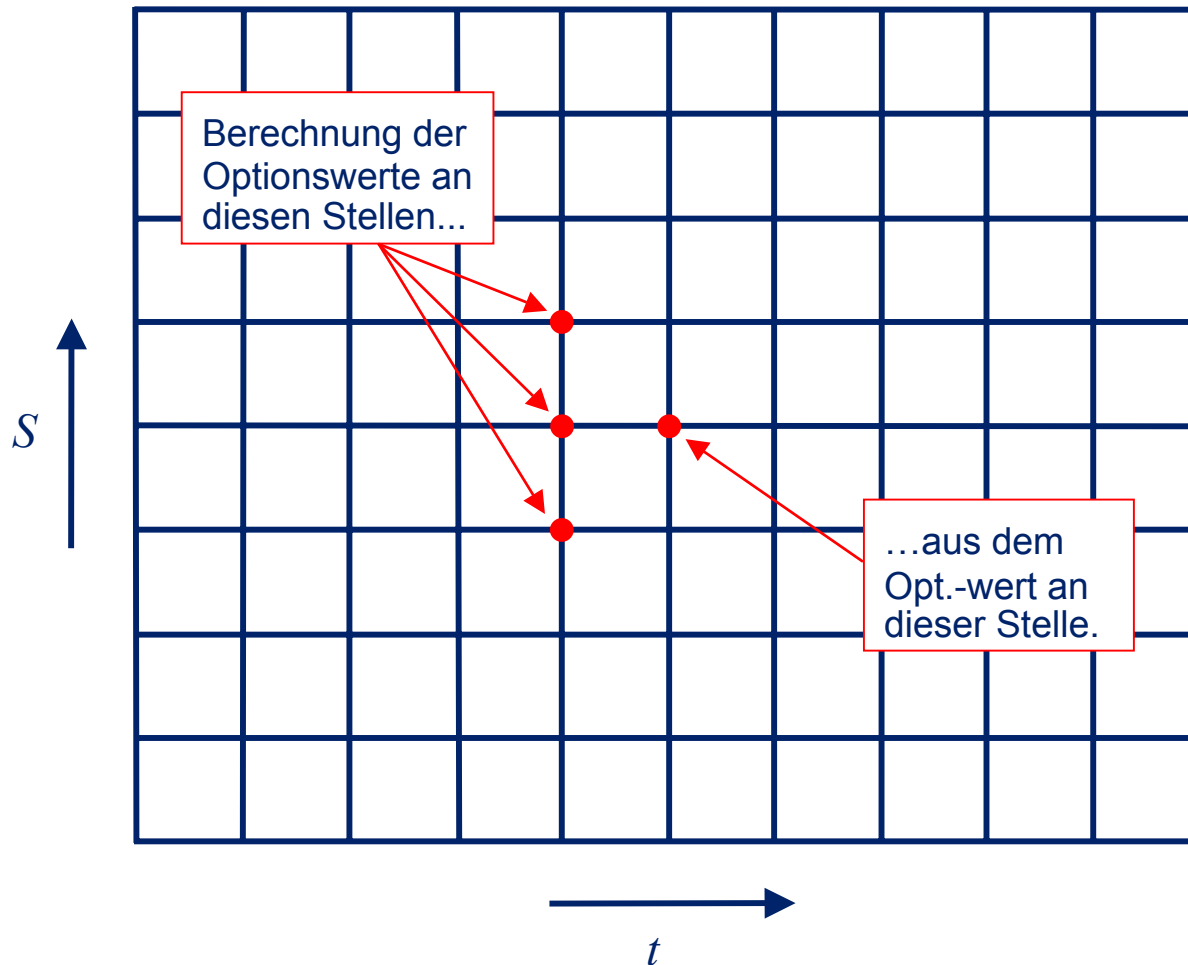
$$c_k \equiv -\frac{\Delta t}{2} (\sigma^2 k^2 + rk) \quad (40 \text{ c})$$

für $m = 1, \dots, M$

und $k = 1, \dots, N - 1$;

Spezialfälle $k = 0, N$

Die implizite Methode



Spezialfälle der Diskretisierung der B.-S. DGL mittels impliziter Finiter Differenzen Methode (1)

Fall 1: $k = 0$

Die Berechnungsvorschrift lautet in diesem Fall $a_0 V_{-1}^{m-1} + b_0 V_0^{m-1} + c_0 V_1^{m-1} = V_0^m$. Der Wert V_{-1}^{m-1} liegt *außerhalb* des durch die Diskretisierung vorgegebenen Definitionsbereiches. Da jedoch $a_0 = 0$ gilt, muss wie im expliziten Fall die Berechnungsvorschrift für $k = 0$ nicht modifiziert werden.

Fall 2: $k = N$

Die Berechnungsvorschrift lautet jetzt $a_N V_{N-1}^{m-1} + b_N V_N^{m-1} + c_N V_{N+1}^{m-1} = V_N^m$. In diesem Fall liegt der Wert V_{N+1}^{m-1} *außerhalb* des durch die Diskretisierung vorgegebenen Definitionsbereiches.

Analog zur expliziten Methode benutze man wieder das bekannte Verhalten des Optionswertes für $S \rightarrow \infty$, also z.B. $V_{N+1}^{m-1} = 2V_N^{m-1} - V_{N-1}^{m-1}$, falls für die Option

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right|_{S \rightarrow \infty} = 0 \text{ gilt.}$$

Spezialfälle der Diskretisierung der B.-S. DGL mittels impliziter Finiter Differenzen Methode (2)

Analog zur expliziten Methode folgt auch hier als Ergebnis

$$a_N^* V_{N-1}^{m-1} + b_N^* V_N^{m-1} = V_N^m \quad (41)$$

$$\text{mit } a_N^* \equiv r \Delta t N \quad (42 \text{ a})$$

$$b_N^* \equiv 1 - r \Delta t (N - 1) \quad (42 \text{ b})$$

Vergleich: Explizite vs. implizite Lösung

Die explizite Finite Differenzen Methode:

Bei der **expliziten** Lösung haben wir mit Hilfe der Gleichungen (33) und (35) die Möglichkeit, aus drei zu einer späteren Zeit $t + m \Delta t$ bekannten Optionswerten [bzgl. der Spotpreise $(k - 1) \Delta S$, $k \Delta S$ und $(k + 1) \Delta S$] den Wert zum Spotpreis $k \Delta S$ zu der früheren Zeit $t + (m - 1) \Delta t$ **direkt** („explizit“) zu berechnen.

Die implizite Finite Differenzen Methode:

Bei der **impliziten** Lösung können wir mittels der Gleichungen (39) und (41) nicht direkt von dem bekannten Optionswert zum Spotpreis $k \Delta S$ und zur Zeit $t + m \Delta t$ auf die drei Werte zu den Spotpreisen $(k - 1) \Delta S$, $k \Delta S$ und $(k + 1) \Delta S$ zur früheren Zeit $t + (m - 1) \Delta t$ schließen.

Stattdessen stellen die Gleichungen (39) und (41) ein **$(N + 1)$ -dimensionales, lineares Gleichungssystem** dar, dessen Lösung die gesuchten Optionswerte

$$\left(V_0^{m-1}, V_1^{m-1}, \dots, V_N^{m-1} \right)$$

liefert (\rightarrow „implizit“).

Das lineare Gleichungssystem der impliziten Finiten Differenzen Methode

Zu lösen ist das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b_0 & c_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_N^* & b_N^* \end{pmatrix}}_{\equiv A} \underbrace{\begin{pmatrix} V_0^{m-1} \\ V_1^{m-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ V_N^{m-1} \end{pmatrix}}_{\equiv \vec{V}^{m-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} V_0^m \\ V_1^m \\ \vdots \\ \vdots \\ V_N^m \end{pmatrix}}_{\equiv \vec{V}^m}$$

für $m = 1, 2, \dots, M$.

Um $\vec{V}^{m-1} = A^{-1} \vec{V}^m$ zu berechnen, ist die Inversion der $(N + 1)$ -dimensionalen Matrix A erforderlich. Hierzu sind i.a. $O((N + 1)^2)$ Rechenschritte erforderlich.

Bemerkung:

Die Matrix A ist unabhängig von dem Zeitindex m . Für die M Zeitschritte muss daher nur eine Inversion durchgeführt werden.

Die LU-Zerlegung (1)

Da A eine Tridiagonalmatrix ist, d.h. da A nur auf der Haupt- und auf den beiden Nebendiagonalen von Null verschiedene Einträge hat, kann man sich der **LU-Zerlegung** der Matrix A bedienen. Dabei wird A dargestellt als das Produkt einer unteren (lower) und einer oberen (upper) Diagonalmatrix:

$$A = LU \quad \text{mit} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_1 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & l_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_N & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U = \begin{pmatrix} d_0 & u_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_1 & u_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & d_{N-1} & u_{N-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_N \end{pmatrix}$$

Die Koeffizienten l_1, \dots, l_N , u_0, \dots, u_{N-1} und d_0, \dots, d_N werden bestimmt über die Gleichungen ...

Die LU-Zerlegung (2)

$$\begin{aligned}
 u_i &= c_i && \text{für } i = 0, 1, \dots, N-1 \\
 d_0 &= b_0 \\
 l_i &= a_i / d_{i-1} && \text{für } i = 1, 2, \dots, N \\
 d_i &= b_i - l_i c_{i-1} && \text{für } i = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned} \tag{43}$$

Um \vec{V}^{m-1} zu berechnen, schreibe man das Gleichungssystem als

$$\begin{aligned}
 \vec{V}^m &= A \vec{V}^{m-1} \\
 &= \underbrace{LU}_{\equiv \vec{W}} \vec{V}^{m-1}
 \end{aligned}$$

und bestimme zunächst \vec{W} aus

$$\vec{V}^m = L \vec{W}$$

und anschließend \vec{V}^{m-1} aus

$$\vec{W} = U \vec{V}^{m-1} .$$

Die implizite Finite Differenzen Methode

Zusammenfassung: Die implizite Finite Differenzen Methode

- (i) Lege ein $S_{\max} \gg K$ fest. Unterteile $[0, S_{\max}]$ in N äquidistante Preisschritte der Länge ΔS , d.h. $S_{\max} = N \Delta S$.
- (ii) Unterteile $[t, T]$ in M äquidistante Zeitschritte der Länge Δt , d.h. $T - t = M \Delta t$.
- (iii) Berechne zur Zeit T die durch das Auszahlungsprofil bekannten Werte von V_k^M für die auf dem Gitter definierten $N + 1$ Werte des Underlyings, also für $k = 0, 1, \dots, N$.
- (iv) Berechne mittels Gl. (43) die Koeffizienten der Matrizen L und U .
- (v) Berechne mittels Gl. (44) und (45) (für amerikanische Optionen oder Bermuda Optionen muss Gl. (45) entsprechend modifiziert werden) in rückwärtiger Zeitrichtung die Optionspreise V_k^m sukzessive für $T - \Delta t, T - 2 \Delta t, \dots, T - N \Delta t = t$, d.h. für $m = M - 1, M - 2, \dots, 1, 0$ und für alle $k = 0, 1, \dots, N$.

Vor- und Nachteile der impliziten ggü. der expliziten Finiten Differenzen Methode

Vorteil:

- Die implizite Finite Differenzen Methode ist numerisch stabiler als die explizite Finite Differenzen Methode.

Nachteil:

- Die Programmierung der impliziten Finiten Differenzen Methode ist aufwendiger als die Programmierung der expliziten Finiten Differenzen Methode.

Diskretisierung der B.-S. DGL mittels Crank-Nicolson Verfahren

Das Crank-Nicolson Verfahren entspricht einem „Mittelwert“ der expliziten und impliziten Methoden. Mittelung der Gleichungen (32) und (38) liefert

$$\begin{aligned} & \frac{V_k^m - V_k^{m-1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \sigma^2 (k \Delta S)^2 \left(\frac{1}{2} \frac{V_{k+1}^m - 2V_k^m + V_{k-1}^m}{(\Delta S)^2} + \frac{1}{2} \frac{V_{k+1}^{m-1} - 2V_k^{m-1} + V_{k-1}^{m-1}}{(\Delta S)^2} \right) \\ & + rk \Delta S \left(\frac{1}{2} \frac{V_{k+1}^m - V_{k-1}^m}{2 \Delta S} + \frac{1}{2} \frac{V_{k+1}^{m-1} - V_{k-1}^{m-1}}{2 \Delta S} \right) - r \left(\frac{1}{2} V_k^m + \frac{1}{2} V_k^{m-1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

Umformung liefert:

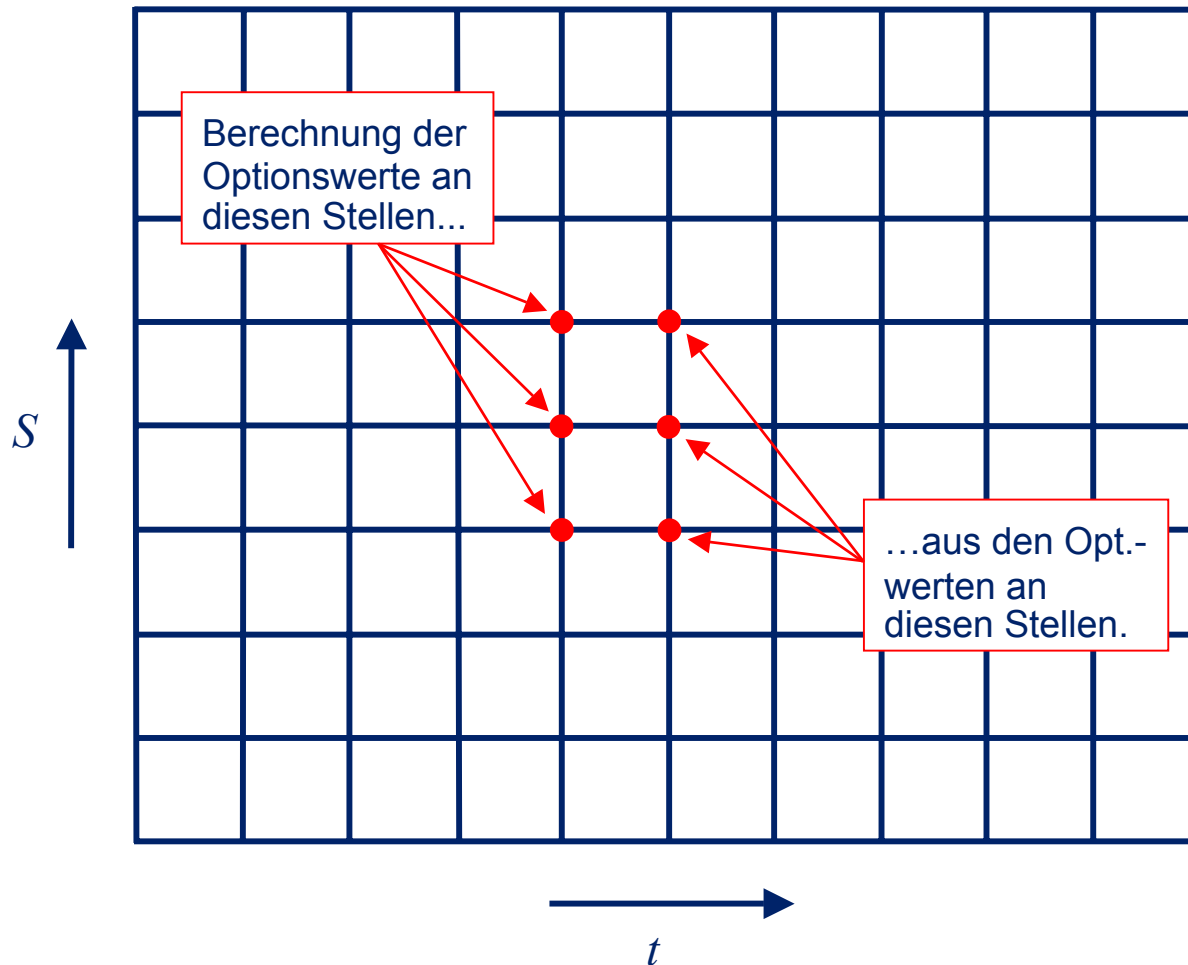
$$a_k V_{k-1}^{m-1} + (2 + \tilde{b}_k) V_k^{m-1} + c_k V_{k+1}^{m-1} = -a_k V_{k-1}^m + (2 - \tilde{b}_k) V_k^m - c_k V_{k+1}^m \quad (47)$$

$$\text{mit } \tilde{b}_k \equiv \Delta t (\sigma^2 k^2 + r) \quad (48)$$

und a_k, c_k gemäß Gl. (40 a) und (40 c).

Gl. (47) gilt (analog zu den expliziten und impliziten Methoden) für $m = 1, \dots, M$ und $k = 1, \dots, N - 1$. $k = 0, N$ sind wiederum Spezialfälle.

Das Crank-Nicolson Verfahren



Weiteres Vorgehen beim Crank-Nicolson Verfahren

Das weitere Vorgehen beim Crank-Nicolson Verfahren ist vollkommen analog zum Vorgehen bei der impliziten Finiten Differenzen Methode:

- Behandlung der Spezialfälle $k = 0, N$:
 - Wegen $a_0 = 0$ gilt (47) auch für $k = 0$.
 - Für $k = N$ benutze man wieder das bekannte Verhalten des Optionswertes für $S \rightarrow \infty$, also z.B. $V_{N+1}^{m-1} = 2V_N^{m-1} - V_{N-1}^{m-1}$ und $V_{N+1}^m = 2V_N^m - V_{N-1}^m$, falls für die Option $\left. \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right|_{S \rightarrow \infty} = 0$ gilt.
- Auch beim C.-N. Verfahren werden, ausgehend vom bekannten Auszahlungsprofil der Option zur Zeit T , in rückwärtiger Zeitrichtung die Optionspreise für $T - \Delta t, T - 2\Delta t, \dots, T - N \Delta t = t$ berechnet. Die rechte Seite von Gleichung (47) ist daher bekannt. Die Berechnung von $V_0^{m-1}, V_1^{m-1}, \dots, V_N^{m-1}$ erfolgt wieder durch Lösung eines lin. Gl.-systems (\rightarrow „implizit“), z.B. wieder mittels LU-Zerlegung.
- Die Berücksichtigung vorzeitiger Ausübung für amerikanische Optionen oder Bermuda Optionen folgt exakt der impliziten Methode.

Vor- und Nachteile des Crank-Nicolson Verfahrens

Vorteile:

- Alle Vorteile der impliziten Finiten Differenzen Methode sind auch beim Crank-Nicolson Verfahren zu nennen.
- Man kann leicht zeigen, dass der Diskretisierungsfehler beim Crank-Nicolson Verfahren von der Größe $O((\Delta t)^2, (\Delta S)^2)$ ist. Insbesondere ist der Fehler durch die Diskretisierung der Zeitachse kleiner, wodurch das Crank-Nicolson Verfahren schneller und/oder genauer ist als die implizite Finite Differenzen Methode, die einen Diskretisierungsfehler der Größe $O(\Delta t, (\Delta S)^2)$ beinhaltet.

Nachteil:

- Das Crank-Nicolson Verfahren ist bei der Umsetzung das aufwendigste der vorgestellten Verfahren.

Inhalt

- 1 Stochastische Prozesse
- 2 Itô Integral und stochastische Differentialgleichungen
- 3 Vom Random Walk zur Brownschen Bewegung

- 4 Die Annahmen im Black-Scholes Modell
- 5 Herleitung der Black-Scholes Gleichung
- 6 Allgemeine Lösung der B.-S. Gleichung für europäische Optionen

- 7 Die Put-Call Parität
- 8 Analytische Bewertung einiger europäischer Optionen

- 9 Binomialbaum Methode
- 10 Weitere Finite Differenzen Methoden: Explizit, implizit, Crank-Nicolson
- 11 **Vergleich der Finiten Differenzen Methoden und weitere Verfahren**

Vergleich der drei Finiten Differenzen Methoden (1)

Im folgenden werden die explizite und implizite Finite Differenzen Methoden sowie das Crank-Nicolson Verfahren anhand eines analytisch exakt berechenbaren Wertes miteinander verglichen.

Betrachte:

Optionstyp:	Plain Vanilla Call Option (Long)
Ausübungsart:	europäisch
Volatilität:	20%
risikofreier Zinssatz:	5%
Strikepreis:	20
Spotpreis:	“in-the-money”, also > 20
Restlaufzeit:	3 Monate

Vergleich der drei Finiten Differenzen Methoden (2)

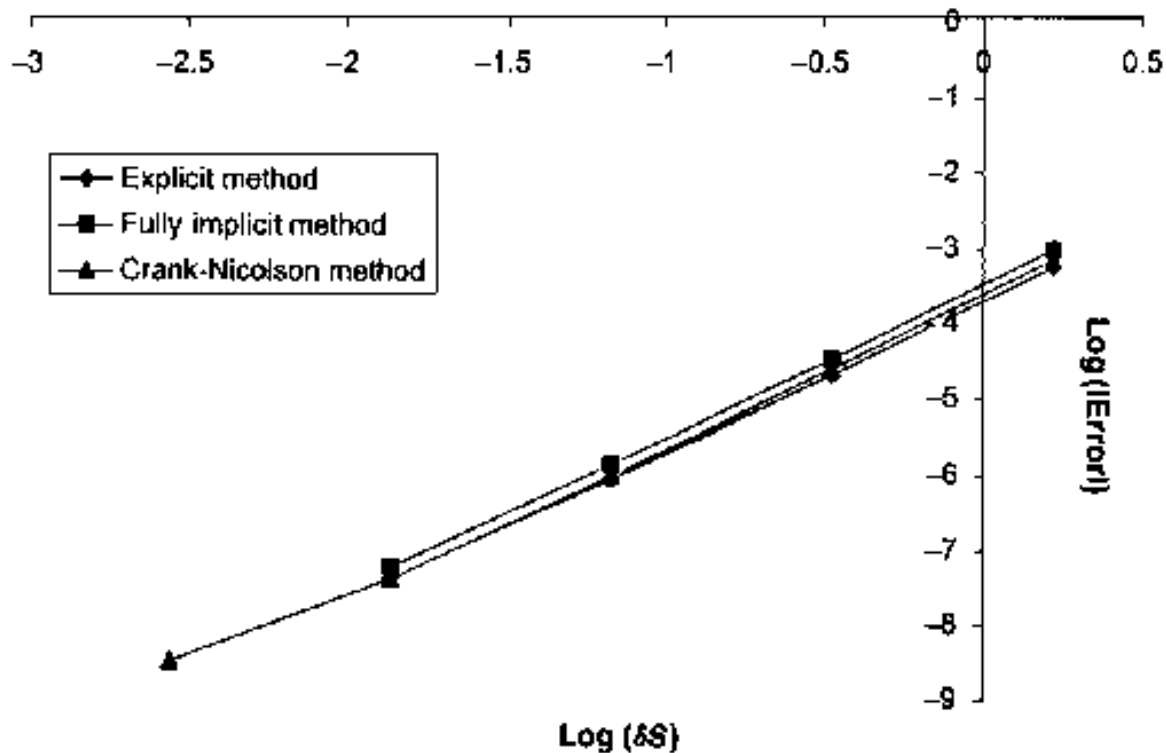


Figure 47.3 Log(Error) as a function of $\log(\delta S)$ for the three finite-difference schemes.

$\log |\text{Error}| \approx \text{const.} + 2 \log(\Delta S)$, also $|\text{Error}| \sim (\Delta S)^2$ für alle drei Verfahren

Vergleich der drei Finiten Differenzen Methoden (3)

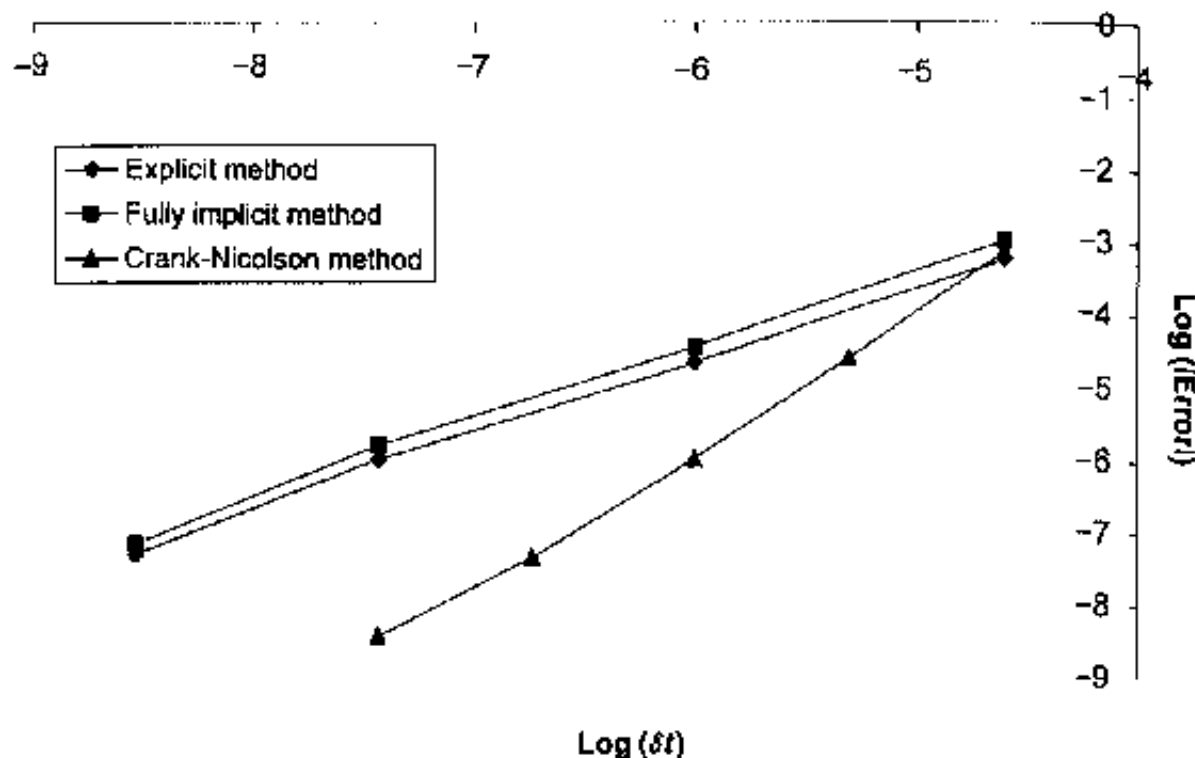


Figure 47.4 $\text{Log}(|\text{Error}|)$ as a function of $\text{log}(\Delta t)$ for the three finite-difference schemes.

$\log |\text{Error}| \approx \text{const.} + \log(\Delta t)$, also $|\text{Error}| \sim \Delta t$ für die expl. und impl. Methode

$\log |\text{Error}| \approx \text{const.} + 2 \log(\Delta t)$, also $|\text{Error}| \sim (\Delta t)^2$ für das C.-N. Verfahren

Weitere Verfahren

- **Jacobi Verfahren:** Iterative Lösung der Matrix-Gleichungen (39) + (41) bzw. (47) + (entsprechende „ $k = N$ Gleichung“).
- **Gauß-Seidel Verfahren:** Entspricht einem modifiziertem Jacobi Verfahren, bei dem während eines Iterationsschrittes bereits Informationen aus diesem Iterationsschritt berücksichtigt werden.
- **Sukzessives Overrelaxations (SOR) Verfahren:** Modifikation des Gauß-Seidel Verfahrens, so dass das Konvergenzverhalten bei der Iteration verbessert wird (beidseitige anstelle von einseitiger Konvergenz).
- **Douglas Verfahren:** Durch Modifikation der Gewichtung der Gleichungen (32) und (38) (siehe Gl. (46)) wird ein Diskretisierungsfehler der Größe $O((\Delta t)^2, (\Delta S)^4)$ erreicht.
- ...

Literatur z.B. P. Wilmott, *Derivatives*, John Wiley & Sons, Kapitel 47

Literatur

- G.R. Grimmet, D.R. Stirzaker, *Probability and Random Processes*, Oxford Science Publications
- P. Wilmott, *Derivatives*, John Wiley & Sons
- P. Wilmott, J. Dewynne, S. Howison, *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*, Oxford Financial Press
- University of Oxford, *M.Sc. and Diploma in Mathematical Finance*, Kursunterlagen
- H.-P. Deutsch, *Derivate und Interne Modelle*, 2. Auflage, Palgrave
- J. Franke, W. Härdle, C. Hafner, *Einführung in die Statistik der Finanzmärkte*, Springer Verlag
- P.G. Zhang, *Exotic Options*, World Scientific
- Diese Vorlesung: www.d-fine.de → Bibliothek → Vorlesungen

Kontakt

Dr. Jörn Rank

Tel.: 06196-7697-1816

Fax: 06196-7697-2816

e-mail: joern.rank@d-fine.de

d-fine GmbH

Mergenthalerallee 55

65760 Eschborn

Germany

Tel.: +49/(0)6196/7697-0

Fax: +49/(0)6196/7697-1900

www.d-fine.de

e-mail: info@d-fine.de

d fine

deepest understanding finest consulting