

Stochastische Prozesse in der Finanzmathematik

Vorlesung an der Johann Wolfgang Goethe-Universität
Frankfurt am Main, WS 2000/2001

Dr. Jörn Rank

15. Dezember 2000



Vorlesung 8: Value at Risk

Dr. Jörn Rank

15. Dezember 2000



Inhalt

- 1 - Quantifizierung von Risiko - Der Value at Risk
- 2 - Backtesting
- 3 - Historische Simulation
- 4 - VaR eines Risikofaktors
- 5 - Die lineare Näherung
- 6 - VaR eines Finanzinstrumentes
- 7 - Die Varianz-Kovarianz Methode
- 8 - Monte-Carlo Simulation
- (9 - Monte-Carlo Simulation und Copulas)

Vom Marktpreisrisiko zum Value at Risk

Wiederholung:

Unter **Marktpreisrisiko** ist der mögliche Verlust zu verstehen, der sich aus der Unsicherheit über die zukünftige Entwicklung von **Risikofaktoren** ergibt und zur Folge hat, dass eine Zielgröße (z.B. ein Portfolio von Finanzinstrumenten) von einem Referenzwert negativ abweicht.

Mögliche Referenzwerte sind der Marktwert, der Einstandskurs oder der Buchwert der Zielgröße.

Ziel:

Gesucht ist eine Größe, die das Marktpreisrisiko *quantifiziert*.



Definition:

Der **Value at Risk (VaR)** eines Portfolios von Finanzinstrumenten bezeichnet den möglichen Verlust, um den sich der Wert des Portfolios innerhalb einer vorgegebenen Zeitspanne $T - t$ ($t = \text{heute}$) mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit P höchstens verringert.

Bemerkungen zum Value at Risk

- Die einem VaR zugeordnete Wahrscheinlichkeit P bezeichnet man mit **Konfidenzniveau**.
 - Deutscher Grundsatz 1 für interne Modelle fordert $P = 99 \%$
 - Risk Metrics Daten von JP Morgan (s.u.) entsprechen $P = 95 \%$
- Der Zeitraum $T - t$ sollte mindestens so groß gewählt werden, dass die im Portfolio enthaltenen Positionen aufgelöst werden können. Daher wird $T - t$ auch **Liquidationsperiode** genannt.
 - Deutscher Grundsatz 1 für interne Modelle fordert $T - t = 10$ Tage
 - Risk Metrics Daten von JP Morgan stellen $T - t = 1$ Tag und 25 Tage zur Verfügung

Inhalt

- 1 - Quantifizierung von Risiko - Der Value at Risk
- 2 - Backtesting
- 3 - Historische Simulation
- 4 - VaR eines Risikofaktors
- 5 - Die lineare Näherung
- 6 - VaR eines Finanzinstrumentes
- 7 - Die Varianz-Kovarianz Methode
- 8 - Monte-Carlo Simulation
- (9 - Monte-Carlo Simulation und Copulas)

Backtesting

Der VaR möge mit irgendeiner Methode bestimmbar sein.

Frage: Wie gut ist diese Methode?

Antwort:

Die Qualität der VaR Methode richtet sich nach ihrer **Zuverlässigkeit!**

Jede VaR Bestimmung kann nach Ende der gewählten Liquidationsperiode überprüft werden. Dabei wird der tatsächlich erlittene Verlust mit dem VaR verglichen. Führt man diesen Vergleich über einen genügend langen Zeithorizont durch, dann sollten die tatsächlich erlittenen Verluste nur mit einem Anteil von annähernd $(1 - P)$ die vorhergesagten VaR Werte übertreffen.

Dieses Verfahren nennt man **Backtesting**.

Bemerkung:

Insbesondere ist nicht das VaR Verfahren das beste, das den kleinsten oder den größten Wert ergibt!

Inhalt

- 1 - Quantifizierung von Risiko - Der Value at Risk
- 2 - Backtesting
- 3 - Historische Simulation
- 4 - VaR eines Risikofaktors
- 5 - Die lineare Näherung
- 6 - VaR eines Finanzinstrumentes
- 7 - Die Varianz-Kovarianz Methode
- 8 - Monte-Carlo Simulation
- (9 - Monte-Carlo Simulation und Copulas)

Grundidee der Historischen Simulation (1)

Bei der Historischen Simulation werden historische Zeitreihen untersucht, um in der **Vergangenheit** tatsächlich vorgekommene Marktveränderungen zu identifizieren, mit deren Hilfe der Value at Risk, also eine mögliche Marktveränderung in der **Zukunft**, berechnet wird.

Betrachte den Wert F eines Portfolios, das von n Risikofaktoren S_1, \dots, S_n abhängt:

$$F = F(S_1(t), \dots, S_n(t))$$

Bezeichne die Länge der Liquidationsperiode mit Δt , also $\Delta t = T - t$.

Dann liefern die historischen Zeitreihen über den zur Verfügung stehenden historischen Horizont der Länge M für Zeitintervalle von der Länge Δt folgende $m = M - \Delta t$ historischen Wertveränderungen der Risikofaktoren:

$$\Delta S_j(t - m + i) = S_j(t - m + i) - S_j(t - \Delta t - m + i) \quad \text{für } i = 1, \dots, m \text{ und } j = 1, \dots, n \quad (1)$$

Wählt man z.B. eine Zeitreihe von 250 (Bankarbeits-) Tagen (entspricht einer Historie von einem Jahr), so erhält man bei einer Liquidationsperiode von 10 Tagen $m = 240$ historische Wertveränderungen.

Grundidee der Historischen Simulation (2)

Wendet man jetzt alle *historischen* Änderungen der Risikofaktoren auf den *heutigen* Wert des Portfolios an, so erhält man m verschiedene „historische“ Wertänderungen des Portfolios. Mit $t_i \equiv t - m + i$ folgt

$$\Delta F(t_i) = F(S_1(t) + \Delta S_1(t_i), \dots, S_n(t) + \Delta S_n(t_i)) - F(S_1(t), \dots, S_n(t)) \quad \text{für } i = 1, \dots, m. \quad (2)$$

Diese Wertänderungen ordne man in aufsteigender Größe. O.b.d.A. gelte

$$\underbrace{\Delta F(t_1) \leq \Delta F(t_2) \leq \dots \leq \Delta F(t_a)}_{\text{Anzahl} = m(1-P)} \leq \underbrace{\Delta F(t_{a+1}) \leq \dots \leq \Delta F(t_{m-1}) \leq \Delta F(t_m)}_{= \text{VaR}_F}.$$

Zur Berechnung des VaR ignoriere man die ungünstigsten $m(1-P)$ Wertänderungen und bezeichne die Anzahl dieser weggelassenen Werte mit a . Dann ist der VaR gegeben durch die ungünstigste Wertänderung des Portfolios, die größer als $\Delta F(t_a)$ ist, d.h.

$$\text{VaR}_F(\vec{S}, P, t, \Delta t) = \min_{i=1, \dots, m} \{ \Delta F(t_i) \mid \Delta F(t_i) \geq \Delta F(t_a) \}. \quad (3)$$

Beispiel: Bei einer Historie von 250 Tagen, einer Liquidationsperiode von 10 Tagen und einem Konfidenzniveau von 95% ist $a = 12$.

Full Valuation vs. Delta Valuation

Die Berechnung der „historischen“ Wertänderungen des Portfolios mittels Gl. (2) entspricht einer vollständigen Neubewertung („full valuation“). Da dies i.a. sehr zeitaufwendig ist, wird Gl. (2) auch häufig approximiert.

Mit $\Delta_j = \frac{\partial F}{\partial S_j}$ folgt in linearer Näherung („delta valuation“)

$$\Delta F(t_i) \cong \sum_{j=1}^n \Delta_j \Delta S_j(t_i) \quad \text{für } i = 1, \dots, m .$$

Vorteile der Historischen Simulation

- + Das Verfahren ist **unabhängig von Modellannahmen**.
Insbesondere muss nicht angenommen werden, dass sich die Risikofaktoren nach einem geometrischen Random Walk bzw. einer geometrischen Brownschen Bewegung (s.u.) verhalten.
⇒ Vermeidung der „Fat-Tail“ Problematik
- + Es werden **keine Abhängigkeiten der Risikofaktoren untereinander** benötigt.
- + Es müssen **keine Näherungen** benutzt werden.

Nachteile der Historischen Simulation

- **Aufwendige Datenbeschaffung / Datenhaltung** bzgl. der historischen Werte. Beispiel: Bei zwei Risikofaktoren und einer Historie von 250 Tagen benötigt man 500 historische Daten.
- **Schwache statistische Grundlage:** Von m berechneten Werten sind zur VaR-Berechnung nur $m(1 - P) + 1$ Werte relevant. Für eine Zeitreihe von 250 Tagen und den im Grundsatz 1 festgelegten Werten ($\Delta t = 10$ Tage, $P = 99\%$) also nur 3 Tage.
- Bei einer **Änderung der Portfolio Zusammenstellung**, d.h. nach jedem Geschäft, müssen die „historischen“ Wertänderungen $\Delta F(t_i)$ des Portfolios neu berechnet werden.
- Um bei der VaR-Berechnung **durchgehend frei von Modellannahmen** zu sein, dürfte man bei der Berechnung der „historischen“ Wertänderungen des Portfolios ebenfalls keine Modellannahmen treffen. Insbesondere müsste man **ganz auf Optionspreismodelle verzichten**.

Inhalt

- 1 - Quantifizierung von Risiko - Der Value at Risk
- 2 - Backtesting
- 3 - Historische Simulation
- 4 - VaR eines Risikofaktors
- 5 - Die lineare Näherung
- 6 - VaR eines Finanzinstrumentes
- 7 - Die Varianz-Kovarianz Methode
- 8 - Monte-Carlo Simulation
- (9 - Monte-Carlo Simulation und Copulas)

VaR eines Risikofaktors (1)

Sowohl der Varianz-Kovarianz Methode als auch der Monte-Carlo Simulation liegt die Annahme zugrunde, dass sich die Risikofaktoren gemäß einer **geometrischen Brownschen Bewegung** verhalten,

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW .$$

Umformung (Lemma von Itô) liefert als stochastische Differentialgleichung für den Logarithmus von S

$$d \log S = \left(\mu - \sigma^2 / 2 \right) dt + \sigma dW .$$

Allgemein gilt, dass eine stochastische DGL über das entsprechende Itô Integral definiert ist. Es folgt

$$\begin{aligned} \log S(T) - \log S(t) &= \int_t^T \left(\mu - \sigma^2 / 2 \right) dt + \int_t^T \sigma dW \\ &= \left(\mu - \sigma^2 / 2 \right) (T - t) + \sigma \int_t^T dW \\ &\stackrel{\text{Itô}}{=} \left(\mu - \sigma^2 / 2 \right) (T - t) + \sigma (W(T) - W(t)) . \end{aligned}$$

VaR eines Risikofaktors (2)

Da W ein Wiener Prozess ist, folgt (siehe „Eigenschaft (II)“), dass $W(T) - W(t)$ einer $N(0, T - t)$ Verteilung genügt.

Für die Veränderung des Logarithmus des Risikofaktors während der Zeit $\Delta t = T - t$ kann man daher

$$\Delta \log S \equiv \log S(T) - \log S(t) = \left(\mu - \sigma^2 / 2 \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} X \quad (4)$$

schreiben, wobei X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist, $X \sim N(0,1)$.

Für $N(0,1)$ -verteilte Zufallsvariablen sind sowohl die einseitigen als auch die beidseitigen symmetrischen Konfidenzintervalle bekannt.

Es gilt z.B.

$$\begin{array}{ll} 95\% = P(X \leq a) = P(-a \leq X) & \text{mit } a \approx 1,645 \\ 99\% = P(X \leq a) = P(-a \leq X) & \text{mit } a \approx 2,326 \\ 95\% = P(-a \leq X \leq a) & \text{mit } a \approx 1,960 \\ 99\% = P(-a \leq X \leq a) & \text{mit } a \approx 2,576 \end{array}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\equiv P_a}$$

Wahl des Konfidenzintervalls

Bemerkung:

Die Wahl, ob ein- oder zweiseitiges Konfidenzintervall benutzt wird, hängt von dem jeweiligen Finanzprodukt ab, dessen VaR bestimmt werden soll.

Beispiele für die Benutzung einseitiger Konfidenzintervalle:

- Long Position einer Plain Vanilla Call Option oder Short Position einer Plain Vanilla Put Option \Rightarrow Verlust bei fallenden Kurs des Underlyings
- Short Position einer Plain Vanilla Call Option oder Long Position einer Plain Vanilla Put Option \Rightarrow Verlust bei steigendem Kurs des Underlyings

Beispiele für die Benutzung zweiseitiger Konfidenzintervalle:

- Short Position einer Straddle Option oder Long Position einer Butterfly Spread Option \Rightarrow Verlust bei Underlying Kursen, die sich vom (mittleren) Strike Preis wegbewegen
- Long Position einer Straddle Option oder Short Position einer Butterfly Spread Option \Rightarrow Verlust bei Underlying Kursen, die sich zum (mittleren) Strike Preis hinbewegen

VaR eines Risikofaktors (3)

Im folgenden wollen wir ein einseitiges Konfidenzintervall annehmen, das bei einer gegebenen Long-Position einen Verlust bei fallendem Kurs des Risikofaktors beschreibt. Dann ist

$$\Delta \log S = \log S(T) - \log S(t) \geq \left(\mu - \sigma^2 / 2 \right) \Delta t - a \sigma \sqrt{\Delta t} \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit } P_a .$$

Für den Kurs des Risikofaktors folgt

$$S(T) \geq S(t) e^{\left(\mu - \sigma^2 / 2 \right) \Delta t - a \sigma \sqrt{\Delta t}} \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit } P_a .$$

Für den Verlust des Risikofaktors während der Zeit $\Delta t = T - t$ gilt somit

$$S(T) - S(t) \geq S(t) \left(e^{\left(\mu - \sigma^2 / 2 \right) \Delta t - a \sigma \sqrt{\Delta t}} - 1 \right) \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit } P_a .$$

Analog zur Historischen Simulation bezeichnet man daher den Value at Risk des Risikofaktors mit

$$\text{VaR}_{+S}(S, P_a, t, \Delta t) = S(t) \left(e^{\left(\mu - \sigma^2 / 2 \right) \Delta t - a \sigma \sqrt{\Delta t}} - 1 \right) . \quad (5)$$

VaR von Long- und Short-Positionen

Besteht die Long-Position aus N Stücken, so folgt für den VaR:

$$N \times \text{Long} : \text{VaR}_{+NS}(S, P_a, t, \Delta t) = N S(t) \left(e^{(\mu - \sigma^2/2)\Delta t - a\sigma\sqrt{\Delta t}} - 1 \right)$$

Für eine Short-Position aus N Stücken folgt:

$$N \times \text{Short} : \text{VaR}_{-NS}(S, P_a, t, \Delta t) = -N S(t) \left(e^{(\mu - \sigma^2/2)\Delta t + a\sigma\sqrt{\Delta t}} - 1 \right)$$

Beachte:

Die beiden VaRs für die Long- und die entsprechende Short-Position sind *nicht gleich!*

Dies liegt an der Lognormalverteilung des Risikofaktors (siehe Gleichung (4)).

Inhalt

- 1 - Quantifizierung von Risiko - Der Value at Risk
- 2 - Backtesting
- 3 - Historische Simulation
- 4 - VaR eines Risikofaktors
- 5 - Die lineare Näherung
- 6 - VaR eines Finanzinstrumentes
- 7 - Die Varianz-Kovarianz Methode
- 8 - Monte-Carlo Simulation
- (9 - Monte-Carlo Simulation und Copulas)

Lineare Näherung bei der VaR Berechnung

Für die Liquidationsperiode gilt z.B. $\Delta t = 10$ Tage $\approx 0,0274$ Jahre. Es macht daher Sinn, die Exponentialfunktion in Gleichung (5) zu approximieren:

$$\begin{aligned} e^{(\mu - \sigma^2/2)\Delta t - a\sigma\sqrt{\Delta t}} &= 1 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t - a\sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t - a\sigma\sqrt{\Delta t}\right)^2 + \dots \\ &= 1 - a\sigma\sqrt{\Delta t} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{a^2\sigma^2}{2}\right)\Delta t + O(\Delta t)^{3/2} \end{aligned}$$

In der Praxis (\rightarrow Risk Metrics Daten von J.P. Morgan) wird häufig die lineare Näherung in $\sqrt{\Delta t}$ benutzt. Insbesondere wird also der Driffterm vernachlässigt.

In diesem Fall folgt für den Value at Risk eines Risikofaktors:

$$\text{VaR}_{\pm S}(S, P_a, t, \Delta t) \cong -S(t)a\sigma\sqrt{\Delta t} \quad \text{in linearer Näherung} \quad (6)$$

Approximierter VaR von Long- und Short-Positionen

Wir betrachten wieder den Fall, dass sowohl die Long- als auch die Short-Position aus N Stücken bestehe. In linearer Näherung folgt für den VaR:

$$N \times \text{Long} : \text{VaR}_{+NS}(S, P_a, t, \Delta t) \cong -N S(t) a \sigma \sqrt{\Delta t}$$

bzw. $N \times \text{Short} : \text{VaR}_{-NS}(S, P_a, t, \Delta t) \cong -N S(t) a \sigma \sqrt{\Delta t}$

M.a.W.:

In *linearer Näherung* sind die beiden VaRs für die Long- und die entsprechende Short-Position *gleich!*

Umrechnungen von VaR Werten

Wenn man in linearer Näherung rechnet, können VaR Werte zu unterschiedlichen Konfidenzniveaus und Liquidationsperioden sehr leicht ineinander überführt werden.

Aus Gleichung (6) folgt:

$$\text{VaR}_S(S, P_{a_1}, t, T_1 - t) \cong \frac{a_1}{a_2} \sqrt{\frac{T_1 - t}{T_2 - t}} \text{VaR}_S(S, P_{a_2}, t, T_2 - t) \quad \text{in linearer Näherung} \quad (7)$$

Anwendung:

Mit Hilfe von Gleichung (7) können z.B. Risk Metrics Daten von J.P. Morgan ($P = 95\%$ und $T - t = 1$ Tag oder 25 Tage) in Grundsatz 1 relevante Daten ($P = 99\%$ und $T - t = 10$ Tage) umgerechnet werden.

Bemerkung zur linearen Näherung

- In der Literatur wird häufig die folgende Approximation der Exponentialfunktion als lineare Näherung bezeichnet:

$$e^{(\mu - \sigma^2/2)\Delta t - a\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t - a\sigma\sqrt{\Delta t} + \dots$$

- Ferner findet man in der Literatur häufig einen re-skalierten Drift: $\tilde{\mu} \equiv \mu - \frac{\sigma^2}{2}$
- Es werden dann folgende Fälle unterschieden:

$$\text{VaR}_S(S, P_a, t, \Delta t) \cong \begin{cases} -S(t) \left(1 - e^{-a\sigma\sqrt{\Delta t}} \right) & \text{bei Vernachlässigung von } \tilde{\mu} \\ -S(t) \left(a\sigma\sqrt{\Delta t} - \tilde{\mu}\Delta t \right) & \text{in linearer Näherung} \\ -S(t) a\sigma\sqrt{\Delta t} & \text{in lin. Näh. und bei Vernachl. von } \tilde{\mu} \end{cases}$$

Inhalt

- 1 - Quantifizierung von Risiko - Der Value at Risk
- 2 - Backtesting
- 3 - Historische Simulation
- 4 - VaR eines Risikofaktors
- 5 - Die lineare Näherung
- 6 - VaR eines Finanzinstrumentes
- 7 - Die Varianz-Kovarianz Methode
- 8 - Monte-Carlo Simulation
- (9 - Monte-Carlo Simulation und Copulas)

VaR eines von einem Risikofaktor abhängenden Finanzinstrumentes

Bislang wurde nur der VaR eines Risikofaktors (z.B. eines Underlyings) betrachtet.

Wir kommen jetzt zu dem VaR eines Finanzinstrumentes, das von diesem Risikofaktor beeinflusst wird. Wenn der qualitative Zusammenhang zwischen dem Finanzinstrument und dem Risikofaktor bekannt ist*, folgt

$$\text{VaR}_F(S, P_a, t, \Delta t) = F(S(t) + \text{VaR}_S(S, P_a, t, \Delta t)) - F(S(t)) . \quad (8)$$

Da i.a. $|\text{VaR}_S(S, P_a, t, \Delta t)| \ll |S(t)|$ gilt, kann man zur Berechnung von (8) wiederum eine Taylor-Entwicklung durchführen:

$$\begin{aligned} \text{VaR}_F(S, P_a, t, \Delta t) &= \frac{\partial F(S(t))}{\partial S} \text{VaR}_S(S, P_a, t, \Delta t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(S(t))}{\partial S^2} (\text{VaR}_S(S, P_a, t, \Delta t))^2 + \dots \\ &= \underbrace{\Delta(S(t)) \text{VaR}_S(S, P_a, t, \Delta t)}_{\Delta\text{-Approximation}} + \frac{1}{2} \Gamma(S(t)) (\text{VaR}_S(S, P_a, t, \Delta t))^2 + \dots \quad (9) \\ &\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{\Delta\text{-}\Gamma\text{-Approximation}} \end{aligned}$$

* Der Einfachheit halber möge der Wert des Finanzinstrumentes bei fallendem Kurs des Risikofaktors ebenfalls fallen.

Inhalt

- 1 - Quantifizierung von Risiko - Der Value at Risk
- 2 - Backtesting
- 3 - Historische Simulation
- 4 - VaR eines Risikofaktors
- 5 - Die lineare Näherung
- 6 - VaR eines Finanzinstrumentes
- 7 - Die Varianz-Kovarianz Methode
- 8 - Monte-Carlo Simulation
- (9 - Monte-Carlo Simulation und Copulas)

VaR eines von mehreren Risikofaktoren abhängenden Finanzinstrumentes bzgl. eines Risikofaktors

Die **Varianz-Kovarianz Methode** bedient sich der **beiden** bereits oben vorgestellten **Näherungen**:

- Δ -Approximation
- Lineare Näherung in $\sqrt{\Delta t}$

Wir betrachten jetzt den Wert F eines Finanzinstrumentes, das von n Risikofaktoren $S_1(t), \dots, S_n(t)$ abhängt*.

Mit den o. a. Näherungen ist der VaR des Finanzinstrumentes bzgl. *eines* Risikofaktors $S_i(t)$ gegeben durch

$$\text{VaR}_F(S_i, P_a, t, \Delta t) \cong \Delta_i \text{VaR}_{S_i}(S_i, P_a, t, \Delta t) \cong -\Delta_i S_i(t) a \sigma_i \sqrt{\Delta t}$$

mit $\Delta_i = \frac{\partial F}{\partial S_i}(S_1(t), \dots, S_n(t))$.

(10)

* Der Einfachheit halber möge der Wert des Finanzinstrumentes bei fallendem Kurs eines beliebigen Risikofaktors ebenfalls fallen.

VaR eines von mehreren Risikofaktoren abhängenden Finanzinstrumentes bzgl. aller Risikofaktoren (1)

Gesucht ist jetzt der VaR des Finanzinstrumentes bzgl. *aller* Risikofaktoren $S_1(t), \dots, S_n(t)$.

Zur Veranschaulichung betrachten wir zunächst ein Portfolio Π , dass sich linear aus den Risikofaktoren zusammensetzt:

$$\Pi(t) = \sum_{i=1}^n N_i S_i(t) . \quad (11)$$

Bevor wir den VaR von Π bzgl. aller Risikofaktoren berechnen, betrachten wir noch einmal den VaR des i -ten Risikofaktors in linearer Näherung. Nach Gleichung (6) gilt

$$\text{VaR}_{N_i S_i}(S_i, P_a, t, \Delta t) \cong -a N_i S_i(t) \sigma_i \sqrt{\Delta t} .$$

Dieses Ergebnis hätte man auch direkt (d.h. ohne Näherung) erhalten, wenn man anstelle von Gl. (4) mit folgender Gleichung gestartet wäre:

$$S_i(T) - S_i(t) = S_i(t) \sigma_i \sqrt{\Delta t} X_i , \quad (12)$$

wobei X_i wiederum eine standardnormalverteilte Zufallsvariable bezeichnet.

VaR eines von mehreren Risikofaktoren abhängenden Finanzinstrumentes bzgl. aller Risikofaktoren (2)

Es folgt:

$\Pi(T) - \Pi(t)$ ist eine Summe normalverteilter Zufallsvariablen.

Annahme (!):

Die X_1, \dots, X_n sind multinormalverteilt.

Zusammen folgt:

$$\Pi(T) - \Pi(t) = \Pi(t) \sigma_{\Pi} \sqrt{\Delta t} X \quad (13)$$

$$\text{mit } \sigma_{\Pi}^2 = \frac{\sum_{i,j=1}^n N_i S_i(t) \sigma_i \rho_{i,j} N_j S_j(t) \sigma_j}{\left(\sum_{k=1}^n N_k S_k(t) \right)^2} \quad (14)$$

$\rho_{i,j}$ bezeichnet die Korrelation zwischen dem i -ten und dem j -ten Risikofaktor, das heißt $\rho_{i,j} = \rho(S_i(T) - S_i(t), S_j(T) - S_j(t))$.

VaR eines von mehreren Risikofaktoren abhängenden Finanzinstrumentes bzgl. aller Risikofaktoren (3)

Analog zur Herleitung von Gl. (6) (bzw. (5)) folgt jetzt aus Gl. (13) für den VaR des Portfolios Π :

$$\begin{aligned}
 \text{VaR}_{\Pi}(P_a, t, \Delta t) &= -a \Pi(t) \sigma_{\Pi} \sqrt{\Delta t} \\
 &= -a \sqrt{\sum_{i,j=1}^n N_i S_i(t) \sigma_i \rho_{i,j} N_j S_j(t) \sigma_j} \sqrt{\Delta t} \\
 &= -\sqrt{\sum_{i,j=1}^n \left(a N_i S_i(t) \sigma_i \sqrt{\Delta t} \right) \rho_{i,j} \left(a N_j S_j(t) \sigma_j \sqrt{\Delta t} \right)} \quad (15)
 \end{aligned}$$

Als Endergebnis folgt für den Value at Risk des durch Gl. (11) definierten, linearen Portfolios Π

$$\text{VaR}_{\Pi}(\vec{S}, P_a, t, \Delta t) = -\sqrt{\sum_{i,j=1}^n N_i \text{VaR}_{S_i}(S_i, P_a, t, \Delta t) \rho_{i,j} N_j \text{VaR}_{S_j}(S_j, P_a, t, \Delta t)}. \quad (16)$$

VaR eines von mehreren Risikofaktoren abhängenden Finanzinstrumentes bzgl. aller Risikofaktoren (4)

Im letzten Schritt werden nun die Ergebnisse (15) und (16) verallgemeinert auf ein beliebiges Finanzinstrument (bzw. Portfolio von Finanzinstrumenten), das beliebig von den Risikofaktoren $S_1(t), \dots, S_n(t)$ abhängt.

Die Verallgemeinerung von Gl. (15) ergibt

$$\text{VaR}_F(\vec{S}, P_a, t, \Delta t) \cong -a \sqrt{\Delta t} \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \Delta_i S_i(t) \sigma_i \rho_{i,j} \Delta_j S_j(t) \sigma_j} . \quad (17)$$

Die Anwendung von Gl. (9)* liefert in der Δ -Approximation den Value at Risk in der Varianz-Kovarianz Methode:

$$\text{VaR}_F(\vec{S}, P_a, t, \Delta t) \cong -\sqrt{\sum_{i,j=1}^n \Delta_i \text{VaR}_{S_i}(S_i, P_a, t, \Delta t) \rho_{i,j} \Delta_j \text{VaR}_{S_j}(S_j, P_a, t, \Delta t)} . \quad (18)$$

* Zur Erinnerung: Gl. (9) basiert auf der Annahme, dass der Wert des Finanzinstrumentes bei fallendem Kurs eines beliebigen Risikofaktors ebenfalls fällt.

VaR eines von mehreren Risikofaktoren abhängenden Finanzinstrumentes bzgl. aller Risikofaktoren (5)

Um Gl. (17) zu vereinfachen, führen wir die Kovarianzmatrix ein:

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{1,2} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1,n} & c_{2,n} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad c_{i,j} = \rho_{i,j} \sigma_i \sqrt{\Delta t} \sigma_j \sqrt{\Delta t} \quad (19)$$

Dann folgt aus Gl. (17):

$$\text{VaR}_F^2(\vec{S}, P_a, t, \Delta t) \cong a^2 \vec{\Delta}^t C \vec{\Delta} \quad \text{mit} \quad \vec{\Delta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial S_1} S_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial S_n} S_n \end{pmatrix} \quad (20)$$

Vor- und Nachteile der Varianz-Kovarianz Methode

Vorteil:

- + Für die gängigsten Risikofaktoren stehen mit den Risk Metrics Daten von J.P. Morgan sowohl **Varianzen als auch Korrelationen zur Verfügung**. Die VaR-Berechnung wird somit sehr einfach.
Beispiel: Bei zwei Risikofaktoren werden nur 3 „historische“ Werte (zwei Varianzen und eine Korrelation) zur VaR Berechnung benötigt.

Nachteile:

- Das Verfahren hängt ab von der Annahme, dass sich die Risikofaktoren nach einem geometrischen Random Walk bzw. einer geometrischen Brownschen Bewegung verhalten.
⇒ **„Fat-Tail“ Problematik**
- Es werden mehrfach Näherungen benutzt (**lineare Approximation, Δ - oder Δ - Γ -Approximation**), wodurch das Verfahren ungenau werden kann.

Inhalt

- 1 - Quantifizierung von Risiko - Der Value at Risk
- 2 - Backtesting
- 3 - Historische Simulation
- 4 - VaR eines Risikofaktors
- 5 - Die lineare Näherung
- 6 - VaR eines Finanzinstrumentes
- 7 - Die Varianz-Kovarianz Methode
- 8 - Monte-Carlo Simulation
- (9 - Monte-Carlo Simulation und Copulas)

VaR Berechnung mittels Monte-Carlo Simulation (1)

Bei der Monte-Carlo Simulation ist wie bei der Varianz-Kovarianz Methode die **Kovarianzmatrix** (19) von zentraler Bedeutung. Mit dieser werden **Szenarien** von Veränderungen der Risikofaktoren **simuliert**, die mit der durch die Kovarianzmatrix vorgegebenen Wahrscheinlichkeit eintreten könnten. Bzgl. aller so erhaltenen Szenarien wird jeweils der Portfoliowert berechnet (d.h. „**full valuation**“). Der Value at Risk ergibt sich dann aus der statistischen Auswertung der so simulierten Portfoliowerte.

Bemerkung:

Da wir bei der MC Simulation die lineare Näherung nicht benötigen, sind hier die Korrelationen $\rho_{i,j}$ gegenüber (19) geringfügig anders definiert,

$$\rho_{i,j} = \rho(\log S_i(T) - \log S_i(t), \log S_j(T) - \log S_j(t)) .$$

VaR Berechnung mittels Monte-Carlo Simulation (2)

Pro simuliertem Szenario sind also die folgenden Schritte durchzuführen:

- Bei n Risikofaktoren sind n unkorrelierte, standardnormalverteilte Pseudo-Zufallszahlen X_i numerisch zu erzeugen.
- Mittels Cholesky-Zerlegung der Kovarianzmatrix (19) werden aus den X_1, \dots, X_n Zufallszahlen Y_1, \dots, Y_n erzeugt, die gemäß der Kovarianzmatrix korreliert sind.
- Analog zu Gl. (4) ist die Wertveränderung der Risikofaktoren $S_i(t)$ unter den simulierten Werten Y_i gegeben durch

$$\begin{aligned} \log S_i(T) - \log S_i(t) &= (\mu_i - \sigma_i^2 / 2) \Delta t + Y_i \\ \Rightarrow S_i(T) &= S_i(t) e^{(\mu_i - \sigma_i^2 / 2) \Delta t + Y_i} \quad \text{für } i = 1, \dots, n . \end{aligned} \quad (21)$$

- Analog zu Gl. (2) ist dann die *volle* Wertveränderung des Portfolios

$$\Delta F_k = F(S_1(T), \dots, S_n(T)) - F(S_1(t), \dots, S_n(t)) . \quad (22)$$

In Gl. (22) zählt der Index k das simulierte Szenario ab.

VaR Berechnung mittels Monte-Carlo Simulation (3)

Die soeben vorgestellte Simulation wird nun sehr oft durchgeführt, d.h. $k = 1, \dots, m$ mit $m = O(10^3 - 10^4)$. Man erhält so m simulierte Wertveränderungen des Portfolios. Analog zur historischen Simulation fordern wir wieder o.B.d.A.

$$\underbrace{\Delta F_1 \leq \Delta F_2 \leq \dots \leq \Delta F_a}_{\text{Anzahl} = m(1-P)} \leq \underbrace{\Delta F_{a+1} \leq \dots \leq \Delta F_{m-1} \leq \Delta F_m}_{= \text{VaR}_F} .$$

Wiederum ignoriere man zur Berechnung des VaR die ungünstigsten $m(1-P)$ Wertänderungen und bezeichne die Anzahl dieser weggelassenen Werte mit a . Dann ist der VaR gegeben durch die ungünstigste Wertänderung des Portfolios, die größer als ΔF_a ist, d.h.

$$\text{VaR}_F(\vec{S}, P, t, \Delta t) = \min_{i=1, \dots, m} \{ \Delta F_i \mid \Delta F_i \geq \Delta F_a \} . \quad (23)$$

Beispiel: Bei 10000 gerechneten Szenarien und einem Konfidenzniveau von 95% ist $a = 500$.

Vor- und Nachteile der Monte-Carlo Simulation

Vorteile:

- + Für die gängigsten Risikofaktoren stehen mit den Risk Metrics Daten von J.P. Morgan sowohl **Varianzen als auch Korrelationen zur Verfügung**. Die VaR-Berechnung wird somit sehr einfach.
Beispiel: Bei zwei Risikofaktoren werden nur 3 „historische“ Werte (zwei Varianzen und eine Korrelation) zur VaR Berechnung benötigt.
- + Es werden **keine Näherungen** benutzt.

Nachteile:

- Das Verfahren hängt ab von der Annahme, dass sich die Risikofaktoren nach einem geometrischen Random Walk bzw. einer geometrischen Brownschen Bewegung verhalten.
⇒ **„Fat-Tail“ Problematik**
- Die Monte-Carlo Simulation ist **numerisch sehr aufwendig** und daher sehr **zeitintensiv**.

Inhalt

- 1 - Quantifizierung von Risiko - Der Value at Risk
- 2 - Backtesting
- 3 - Historische Simulation
- 4 - VaR eines Risikofaktors
- 5 - Die lineare Näherung
- 6 - VaR eines Finanzinstrumentes
- 7 - Die Varianz-Kovarianz Methode
- 8 - Monte-Carlo Simulation
- (9 - Monte-Carlo Simulation und Copulas)

Monte-Carlo Simulation und Copulas

- Ziel: Vermeidung der „Fat-Tail“ Problematik
- Ansatz:
 - 1.) Ersetzung der Abhängigkeitsstruktur, d.h. der Korrelationen
 - 2.) Ersetzung der Randverteilungsannahme, d.h. Ersetzung der Normalverteilung
- R.B. Nelsen, *An Introduction to Copulas*, Springer
- J. Rank, *Copulas in Financial Risk Management*, Diplomarbeit an der Universität Oxford, siehe <http://www.gloriamundi.org/picsresources/jr.pdf>
- J. Rank, T. Siegl, *Applications of Copulas for the Calculation of Value-at-Risk*, in W. Härdle, T. Kleinow, W. Stahl (Herausgeber), *Applied Quantitative Finance*, Springer

Literatur zur 8. Vorlesung

- H.-P. Deutsch, *Derivative und Interne Modelle*, Schäffer-Pöschl Verlag

Vorlesungen in 2001

- Dr. H.-P. Deutsch: Martingale, Numeraire
- Dr. J. Stein: Alternative Verteilungsannahmen (Lévy stabile Prozesse)
- Dr. B. Appasamy: Zinsstrukturmodelle (Black Derman und Toy Modell, 2 Vorlesungen)
- Dr. O. Hein: Asset Liability Management
- J. Topper: Passport Optionen

Ihr Ansprechpartner

Dr. Jörn Rank

Tel. 069-90737-316, joern.rank@d-fine.de



d-fine GmbH

Opernplatz 2

60313 Frankfurt am Main

Germany

T: +49 69-90737-0

F: +49 69-90737-200

www.d-fine.de