

Value at Risk

Vorlesung an der Technischen Universität Darmstadt

Dr. Jörn Rank

11. Juli 2005



Vorlesung 2: Monte Carlo Simulation – Standardmethoden und Copulas

Dr. Jörn Rank

11. Juli 2005



Inhalt

- 1 - Wiederholung
- 2 - Die „traditionelle“ Monte-Carlo Simulation
- 3 - Copulas
- 4 - Die t-Verteilung
- 5 - Monte-Carlo Simulation und Copulas

Wiederholung 1(2)

Definition:

Der **Value at Risk (VaR)** eines Portfolios von Finanzinstrumenten bezeichnet den möglichen Verlust, um den sich der Wert des Portfolios innerhalb einer vorgegebenen Zeitspanne (**Liquidationsperiode**) $T - t$ ($t = \text{heute}$) mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit P (**Konfidenzniveau**) höchstens verringert.

Wiederholung 2(2)

Das zentrale Element der Varianz-Kovarianz Methode ist die Kovarianzmatrix:

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \mathbf{L} & c_{1,n} \\ c_{1,2} & c_{2,2} & \mathbf{L} & c_{2,n} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ c_{1,n} & c_{2,n} & \mathbf{L} & c_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad c_{i,j} = r_{i,j} s_i \sqrt{\Delta t} s_j \sqrt{\Delta t}, \quad (18)$$

wobei $r_{i,j}$ die Korrelation zwischen dem i -ten und dem j -ten Risikofaktor bezeichnet. Für den VaR eines von n Risikofaktoren abhängigen Portfolios gilt näherungsweise

$$\text{VaR}_F^2(S, P_a, t, \Delta t) \cong a^2 \mathbf{\Delta}^t C \mathbf{\Delta} \quad \text{mit} \quad \mathbf{\Delta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial S_1} S_1 \\ \mathbf{M} \\ \frac{\partial F}{\partial S_n} S_n \end{pmatrix} \quad (19)$$

Inhalt

- 1 - Wiederholung
- 2 - Die „traditionelle“ Monte-Carlo Simulation
- 3 - Copulas
- 4 - Die t-Verteilung
- 5 - Monte-Carlo Simulation und Copulas

VaR Berechnung mittels Monte-Carlo Simulation 1(3)

Bei der Monte-Carlo Simulation ist wie bei der Varianz-Kovarianz Methode die **Kovarianzmatrix** (18) von zentraler Bedeutung. Mit dieser werden **Szenarien** von Veränderungen der Risikofaktoren **simuliert**, die mit der durch die Kovarianzmatrix vorgegebenen Wahrscheinlichkeit eintreten könnten. Bzgl. aller so erhaltenen Szenarien wird jeweils der Portfoliowert berechnet (d.h. „**full valuation**“). Der Value at Risk ergibt sich dann aus der statistischen Auswertung der so simulierten Portfoliowerte.

Bemerkung:

Da wir bei der MC Simulation die lineare Näherung nicht benötigen, sind hier die Korrelationen $r_{i,j}$ gegenüber (18) geringfügig anders definiert,

$$r_{i,j} = r(\log S_i(T) - \log S_i(t), \log S_j(T) - \log S_j(t)) .$$

VaR Berechnung mittels Monte-Carlo Simulation 2(3)

Pro simuliertem Szenario sind also die folgenden Schritte durchzuführen:

- § Bei n Risikofaktoren sind n unkorrelierte, standardnormalverteilte Pseudo-Zufallszahlen X_i numerisch zu erzeugen.
- § Mittels Cholesky-Zerlegung der Kovarianzmatrix (18) werden aus den X_1, \dots, X_n Zufallszahlen Y_1, \dots, Y_n erzeugt, die gemäß der Kovarianzmatrix korreliert sind.
- § Analog zu Gl. (4) ist die Wertveränderung der Risikofaktoren $S_i(t)$ unter den simulierten Werten Y_i gegeben durch

$$\begin{aligned} \log S_i(T) - \log S_i(t) &= (m_i - s_i^2 / 2) \Delta t + Y_i \\ \Rightarrow S_i(T) &= S_i(t) e^{(m_i - s_i^2 / 2) \Delta t + Y_i} \quad \text{für } i = 1, \mathbf{K}, n . \end{aligned} \quad (20)$$

- § Analog zum Vorgehen bei der Historischen Simulation ist dann die *volle* Wertveränderung des Portfolios

$$\Delta F_k = F(S_1(T), \mathbf{K}, S_n(T)) - F(S_1(t), \mathbf{K}, S_n(t)) . \quad (21)$$

In Gl. (21) zählt der Index k das simulierte Szenario ab.

VaR Berechnung mittels Monte-Carlo Simulation 3(3)

Die soeben vorgestellte Simulation wird nun sehr oft durchgeführt, d.h. $k = 1, \dots, m$ mit $m = O(10^3 - 10^4)$. Man erhält so m simulierte Wertveränderungen des Portfolios. Analog zur historischen Simulation fordern wir wieder o.B.d.A.

$$\underbrace{\Delta F_1 \leq \Delta F_2 \leq \mathbf{K} \leq \Delta F_a}_{\text{Anzahl} = m(1-P)} \leq \underbrace{\Delta F_{a+1} \leq \mathbf{K} \leq \Delta F_{m-1}}_{= \text{VaR}_F} \leq \Delta F_m .$$

Wiederum ignoriere man zur Berechnung des VaR die ungünstigsten $m(1-P)$ Wertänderungen und bezeichne die Anzahl dieser weggelassenen Werte mit a . Dann ist der VaR gegeben durch die ungünstigste Wertänderung des Portfolios, die größer als ΔF_a ist, d.h.

$$\text{VaR}_F(\mathbf{S}, P, t, \Delta t) = \min_{i=1, \mathbf{K}, m} \{ \Delta F_i \mid \Delta F_i \geq \Delta F_a \} . \quad (22)$$

Beispiel: Bei 10000 gerechneten Szenarien und einem Konfidenzniveau von 95% ist $a = 500$.

Vor- und Nachteile der Monte-Carlo Simulation

Vorteile:

- + Für die gängigsten Risikofaktoren stehen mit den Risk Metrics Daten von J.P. Morgan sowohl **Varianzen als auch Korrelationen zur Verfügung**. Die VaR-Berechnung wird somit sehr einfach.
Beispiel: Bei zwei Risikofaktoren werden nur 3 „historische“ Werte (zwei Varianzen und eine Korrelation) zur VaR Berechnung benötigt.
- + Es werden **keine Näherungen** benutzt.

Nachteile:

- Das Verfahren hängt ab von der Annahme, dass sich die Risikofaktoren nach einem geometrischen Random Walk bzw. einer geometrischen Brownschen Bewegung verhalten.
⇒ **„Fat-Tail“ Problematik**
- Die Monte-Carlo Simulation ist **numerisch sehr aufwendig** und daher sehr **zeitintensiv**.

Inhalt

- 1 - Wiederholung
- 2 - Die „traditionelle“ Monte-Carlo Simulation
- 3 - Copulas
- 4 - Die t-Verteilung
- 5 - Monte-Carlo Simulation und Copulas

Definition eines Copulas

Definition 1:

Ein zweidimensionales **Copula** ist eine Funktion $C : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Für alle $u, v \in [0,1]$: $C(u,0) = C(0,v) = 0$. (C heißt "grounded")

2. Für alle $u, v \in [0,1]$: $C(u,1) = u$ und $C(1,v) = v$.

3. Für alle $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$ mit $u_1 \leq u_2$ und $v_1 \leq v_2$:

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0. \quad (C \text{ heißt "2-increasing"})$$

Im folgenden werden wir C kurz mit Copula bezeichnen.

Beispiele einfacher Copulas

§ $\Pi(u, v) \equiv uv$ **Produkt Copula**

Eigenschaft:

- Π charakterisiert Unabhängigkeit (siehe unten, Satz 4)

§ $M(u, v) \equiv \min(u, v)$ **Obere Fréchet-Hoeffding Grenze**

Eigenschaft:

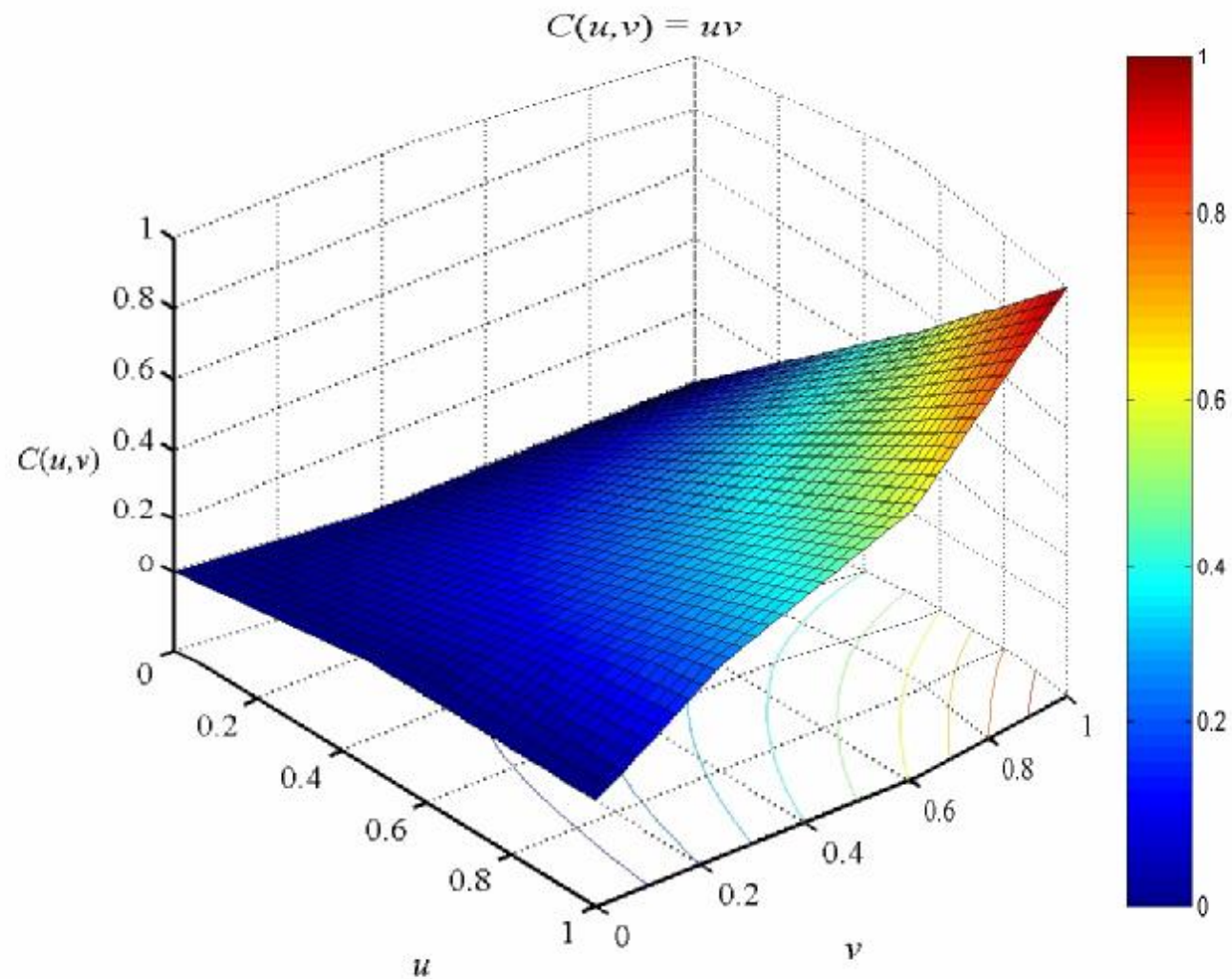
- Für jedes Copula C und alle $u, v \in [0, 1]$: $C(u, v) \leq M(u, v)$

§ $W(u, v) \equiv \max(u + v - 1, 0)$ **Untere Fréchet-Hoeffding Grenze**

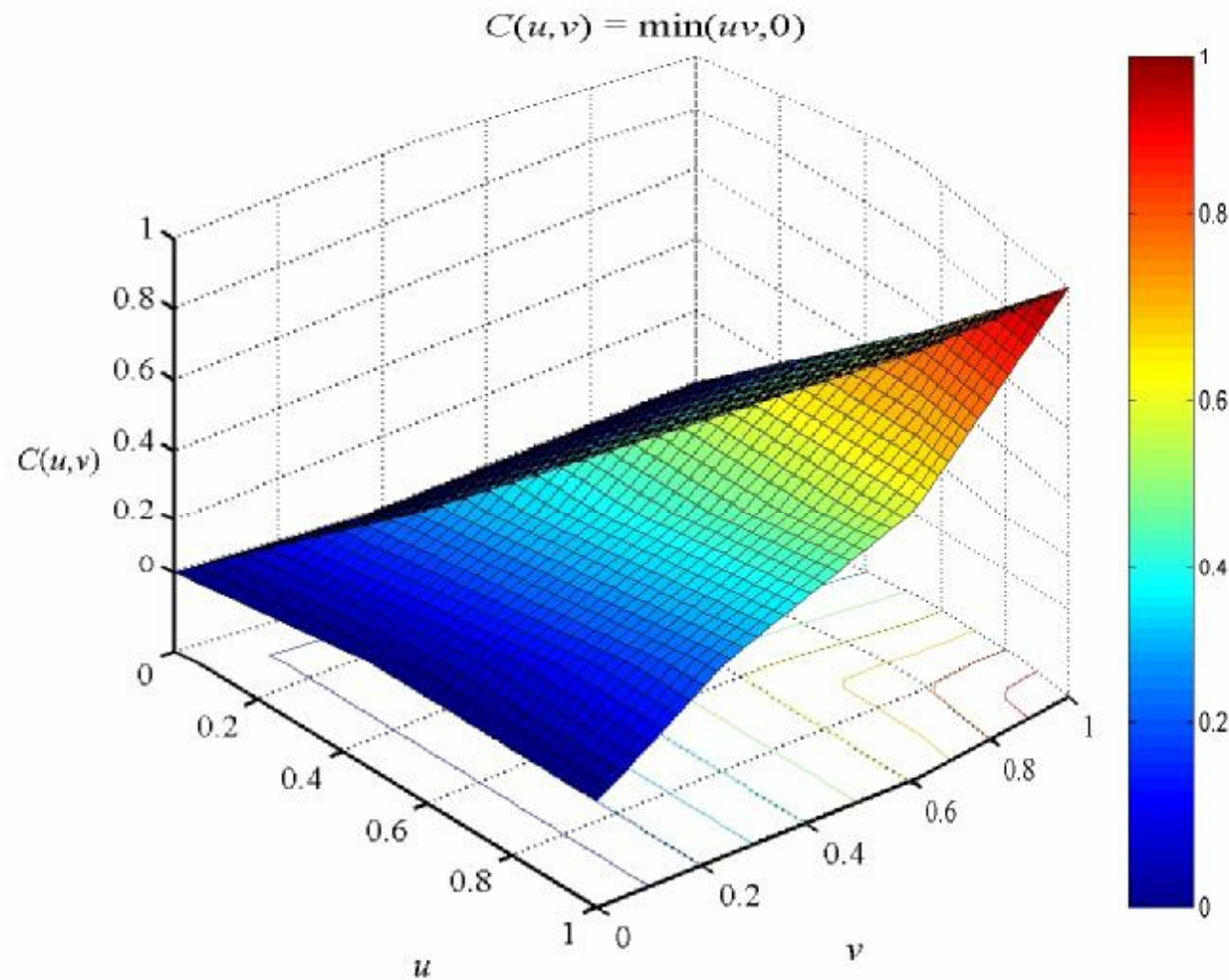
Eigenschaft:

- Für jedes Copula C und alle $u, v \in [0, 1]$: $W(u, v) \leq C(u, v)$

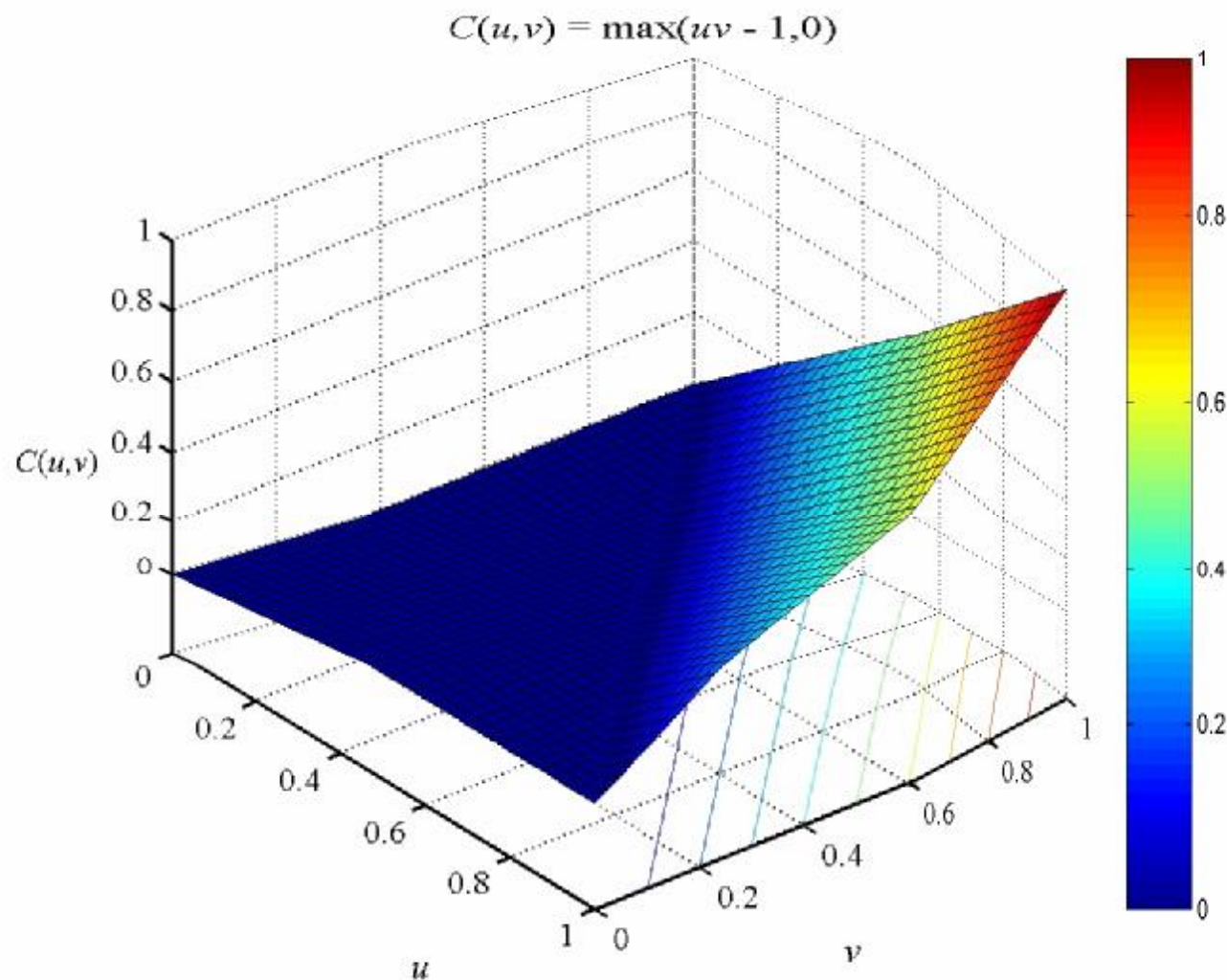
Beispiel: Produkt Copula



Beispiel: Obere Fréchet-Hoeffding Grenze



Beispiel: Untere Fréchet-Hoeffding Grenze



Frank Copula

Das **Frank Copula** (eine 1-parametrische Familie von Copulas) ist definiert durch

$$C_{\text{Frank}}(u, v) \equiv -\frac{1}{q} \log \left[1 + \frac{(e^{-qu} - 1)(e^{-qv} - 1)}{(e^{-q} - 1)} \right] \text{ with } q \in]-\infty, \infty[\setminus \{0\} .$$

Bemerkungen:

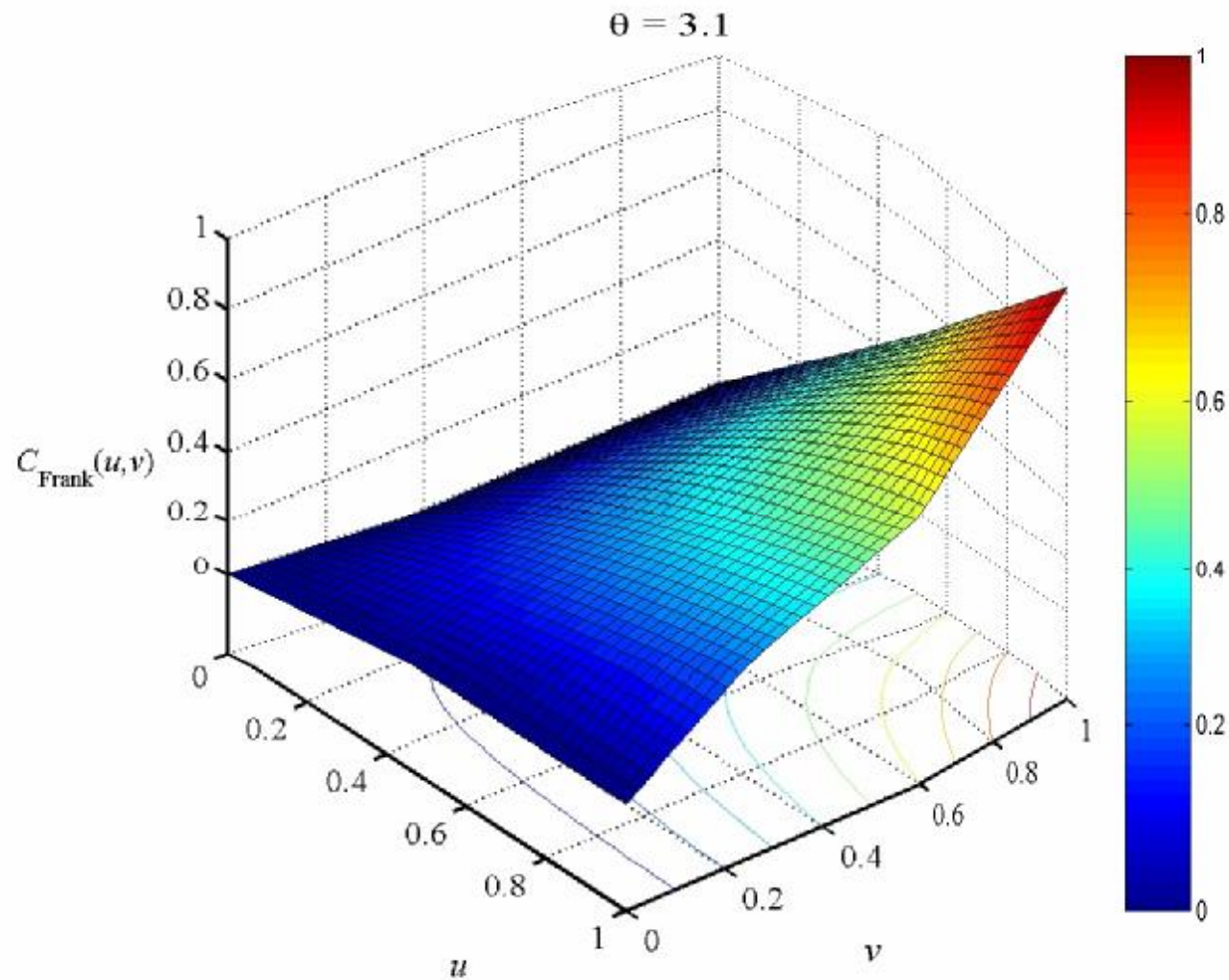
$$\S \quad C_{\text{Frank}}(u, v) \xrightarrow{q \rightarrow \infty} M(u, v) = \min(u, v)$$

$$\S \quad C_{\text{Frank}}(u, v) \xrightarrow{q \rightarrow -\infty} W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$$

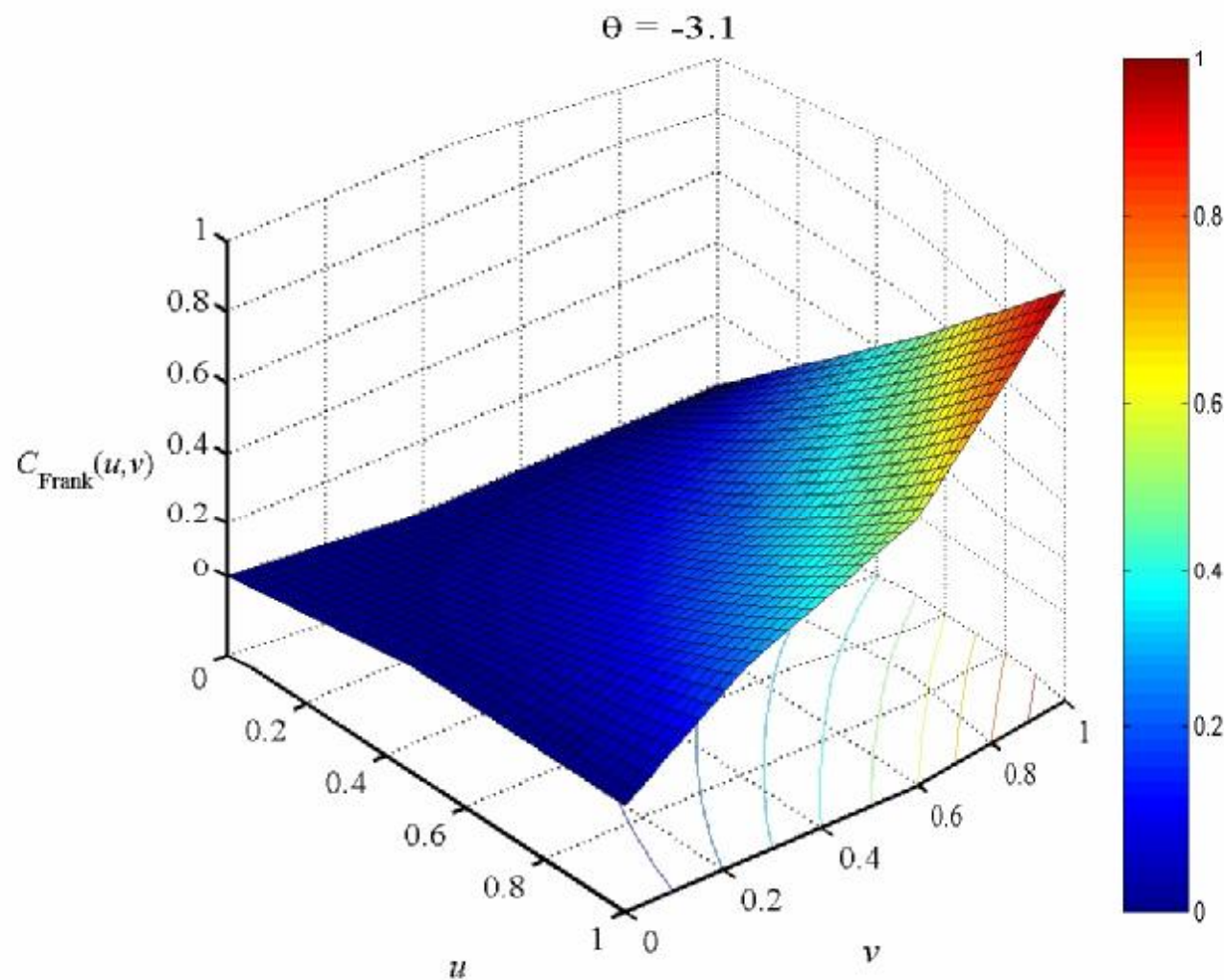
$$\S \quad C_{\text{Frank}}(u, v) \xrightarrow{q \rightarrow 0} \Pi(u, v) = uv$$

\S Eine Familie von Copulas, die M , W und Π enthält, heißt **umfassend**.

Beispiel: Frank Copula mit positiver Abhängigkeit



Beispiel: Frank Copula mit negativer Abhängigkeit



Gumbel-Hougaard Copula

Das **Gumbel-Hougaard Copula** (eine 1-parametrische Familie von Copulas) ist definiert durch

$$C_{\text{GH}}(u, v) \equiv \exp\left\{-\left[(-\log u)^q + (-\log v)^q\right]^{1/q}\right\} \text{ mit } q \in [1, \infty[. \quad (23)$$

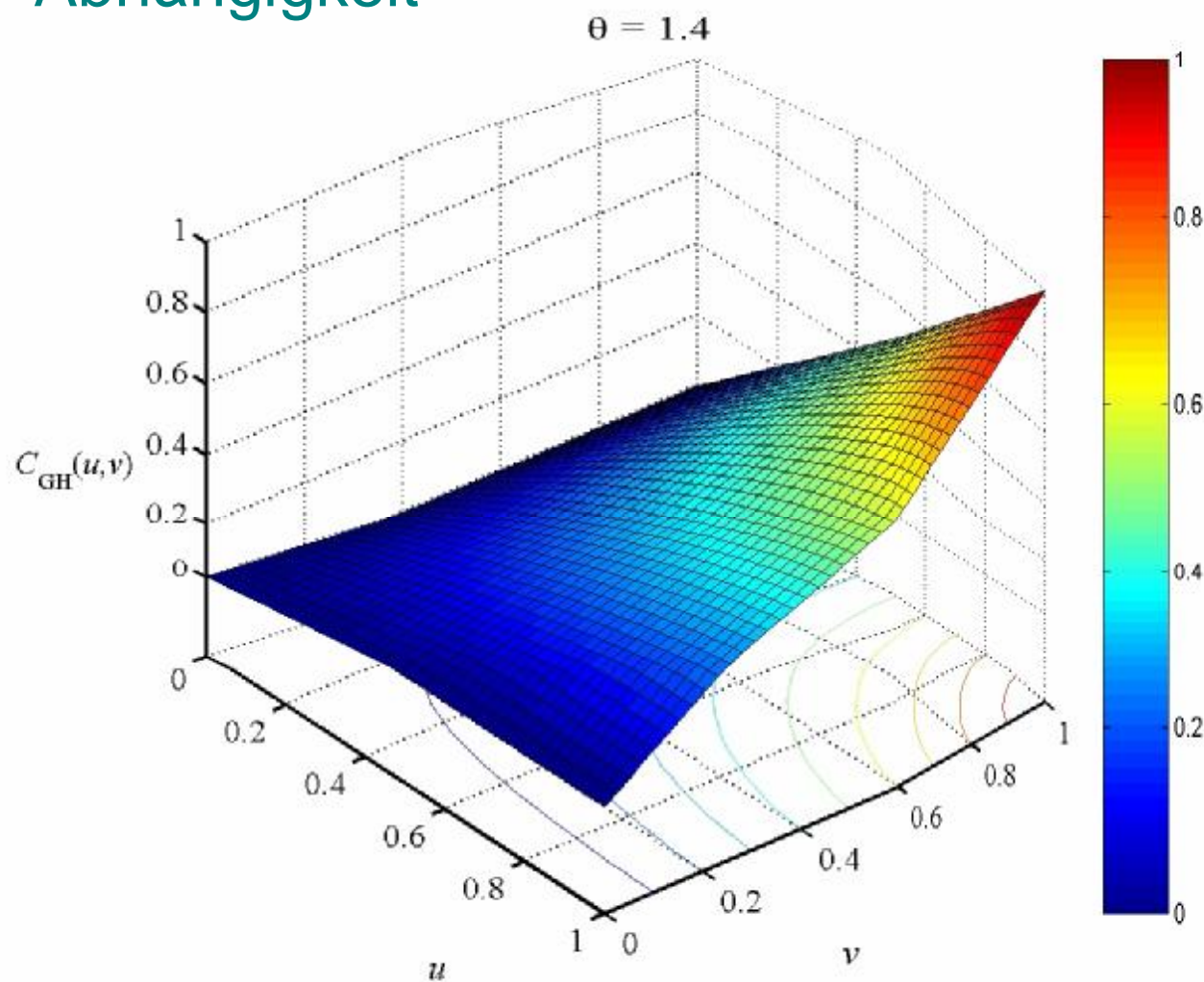
Bemerkungen:

$$\S \quad C_{\text{GH}}(u, v) \xrightarrow{q \rightarrow \infty} M(u, v) = \min(u, v)$$

$$\S \quad C_{\text{GH}}(u, v) \Big|_{q=1} = \Pi(u, v) = uv$$

\S C_{GH} eignet sich zur Beschreibung (starker) positiver Abhängigkeit.

Beispiel: Gumbel-Hougaard Copula mit positiver Abhängigkeit



Gaußsches Copula

Das **Gaußsche Copula** ist definiert durch

$$C_{\text{Gauß}}(u, v) \equiv \int_{-\infty}^{\Phi_1^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi_2^{-1}(v)} f(r_1, r_2) \quad (24)$$

wobei f die Dichtefunktion der Binormalverteilung ist,

$$f(r_1, r_2) = \frac{1}{\sqrt{(2p)^2 \det C}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{r} - \mathbf{m})^t C^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{m})\right\},$$

und Φ_i die eindimensionale, kumulierte Normalverteilung, also z.B.

$$\Phi_1(r_1) = \int_{-\infty}^{r_1} dr_1' f(r_1') \quad \text{mit} \quad f(r_1) = \frac{1}{\sqrt{2ps_1^2}} \exp\left\{-\frac{(r_1 - m_1)^2}{2s_1^2}\right\},$$

und C die Korrelationsmatrix.

Bemerkungen zum Gaußschen Copula 1(2)

Falls die beiden Variablen r_1 und r_2 unkorreliert sind, $r_{1,2} = 0$, folgt

$$\begin{aligned} C_{\text{Gauß}}(u, v) &\equiv \int_{-\infty}^{\Phi_1^{-1}(u)} dr_1 f_1(r_1) \int_{-\infty}^{\Phi_2^{-1}(v)} dr_2 f_2(r_2) \\ &= uv \\ &= \Pi(u, v) \end{aligned}$$

Bemerkungen zum Gaußschen Copula 2(2)

Da $\Phi_1(r_1), \Phi_2(r_2) \in [0,1]$ sind, kann man für u und v auch $\Phi_1(r_1)$ und $\Phi_2(r_2)$ einsetzen.

Wenn man zusätzlich r_1 und r_2 im wahrscheinlichkeitstheoretischen Sinn auffasst, d.h. r_1, r_2 mögen die Werte zweier Zufallszahlen R_1 und R_2 sein, folgt

$$\begin{aligned} C_{\text{Gauß}}(\Phi_1(r_1), \Phi_2(r_2)) &\equiv \int_{-\infty}^{r_1} \int_{-\infty}^{r_2} f(r_1', r_2') \\ &= \mathbb{P}(r_1 \leq R_1, r_2 \leq R_2) . \end{aligned}$$

$\Rightarrow C_{\text{Gauß}}(\Phi_1(r_1), \Phi_2(r_2))$ ist die binormale, kumulierte Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Stetigkeit von Copulas

Satz 1:

Sei C ein Copula. Dann gilt für alle $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1]$:

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|. \quad (25)$$

M.a.W.: Jedes Copula genügt der Lipschitz Bedingung und ist somit **gleichmäßig stetig** auf $[0, 1] \times [0, 1]$.

Eigenschaften der partiellen Ableitung

Satz 2:

Sei C ein Copula. Dann existiert für jedes $u \in [0,1]$ die partielle Ableitung $C_v(u) \equiv \partial C(u,v) / \partial v$ für fast alle $v \in [0,1]$. Für derartige u,v gilt ferner

$$0 \leq \frac{\partial C(u,v)}{\partial v} \leq 1 .$$

Für $C_u(v) \equiv \partial C(u,v) / \partial u$ gilt eine analoge Aussage.

Ferner sind die Funktionen $u \rightarrow C_v(u)$ und $v \rightarrow C_u(v)$ fast überall auf $[0,1]$ wohldefiniert und monoton wachsend.

Beispiel: Partielle Ableitung des Frank Copulas

Beispiel:

Für das Frank Copula C_{Frank} gilt

$$C_{\text{Frank},u}(v) = \frac{\partial}{\partial u} C_{\text{Frank}}(u, v) = \frac{e^{-qu}(e^{-qv} - 1)}{e^{-q} - 1 + (e^{-qu} - 1)(e^{-qv} - 1)} \quad (26)$$

Bemerkungen:

§ $C_{\text{Frank},u}$ ist für $u \in [0, 1]$ und $q \neq 0$ streng monoton wachsend, d.h. $C_{\text{Frank},u}^{-1}$ ist wohldefiniert.

§ Es gilt: $C_{\text{Frank},u}^{-1}(y) = -\frac{1}{q} \log \left[\frac{1 + y(e^{\theta(u-1)} - 1)}{1 + y(e^{\theta u} - 1)} \right]$

Beispiel: Partielle Ableitung des Gumbel-Hougaard Copulas 1(2)

Beispiel:

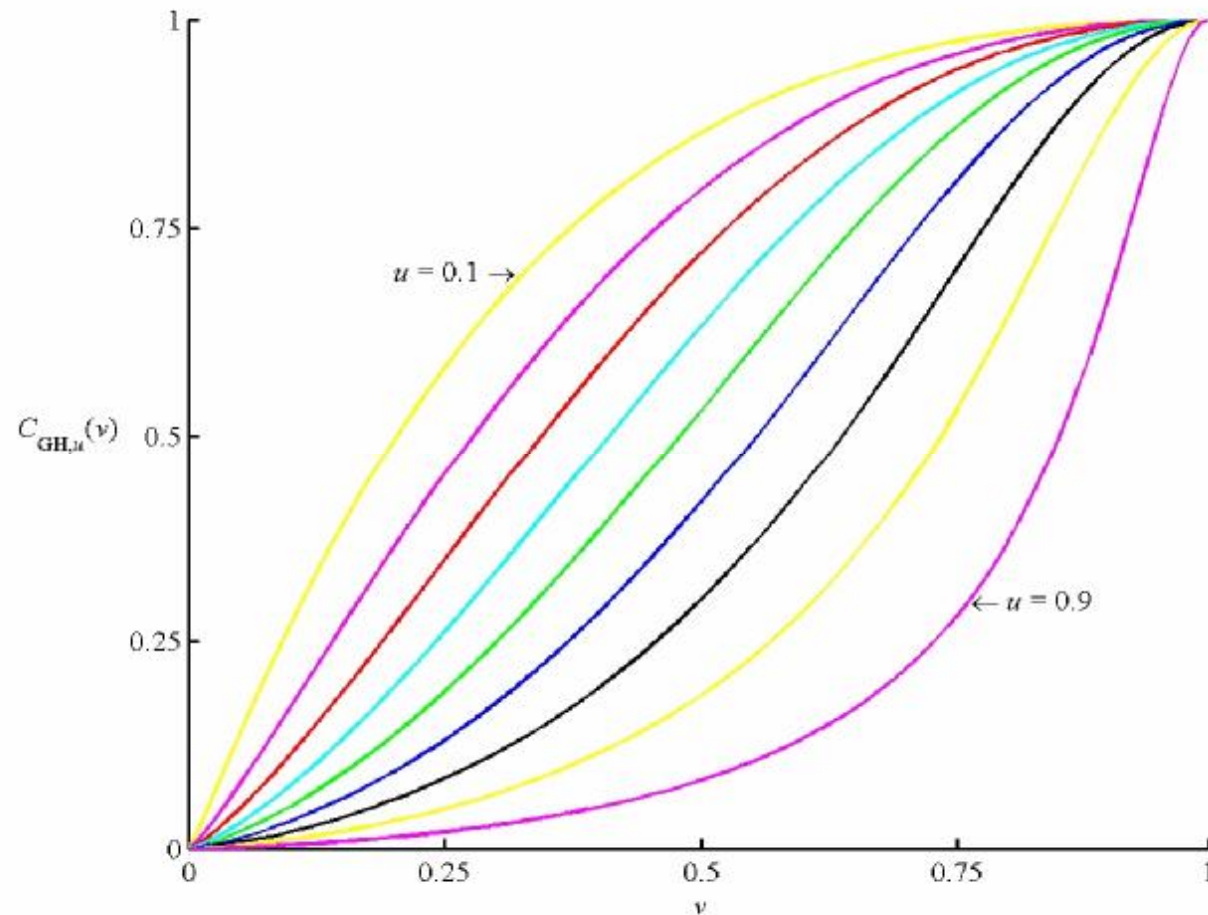
Für das Gumbel-Hougaard Copula C_{GH} gilt

$$C_{GH,u}(v) = \frac{\partial}{\partial u} C_{GH}(u, v) = \exp\left\{-\left[(-\log u)^q + (-\log v)^q\right]^{1/q}\right\} \times \left[(-\log u)^q + (-\log v)^q\right]^{-\frac{q-1}{q}} \frac{(-\log u)^{q-1}}{u} \quad (26)$$

Bemerkungen:

- § $C_{GH,u}$ ist für $u \in]0,1[$ und $q > 1$ streng monoton wachsend, d.h. $C_{GH,u}^{-1}$ ist wohldefiniert.
- § $C_{GH,u}^{-1}$ kann analytisch nicht bestimmt werden. Eine numerische Berechnung ist jedoch möglich.

Beispiel: Partielle Ableitung des Gumbel-Hougaard Copulas 2(2)



$C_{GH,u}(v)$ für $u = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$ und $q = 2.0$

Verteilungsfunktion

Definition 2:

Eine **Verteilungsfunktion** ist eine Funktion $F : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [0,1]$ mit folgenden Eigenschaften:

1. F ist monoton wachsend.
2. $F(-\infty) = 0$ und $F(+\infty) = 1$

Beispiel:

Wenn f eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, dann ist $F(x) = \int_{-\infty}^x dt f(t)$ eine Verteilungsfunktion.

Gemeinsame Verteilungsfunktion

Definition 3:

Eine **gemeinsame Verteilungsfunktion** ist eine Funktion $H : \overline{\mathfrak{R}} \times \overline{\mathfrak{R}} \rightarrow [0,1]$ mit folgenden Eigenschaften:

1. H ist “2-increasing“.
2. Für alle $x_1, x_2 \in \overline{\mathfrak{R}} : H(x_1, -\infty) = H(-\infty, x_2) = 0$ und $H(+\infty, +\infty) = 1$.

Eigenschaften:

- § Die Randverteilungen von H sind definiert als $F_1(x_1) \equiv H(x_1, +\infty)$ und $F_2(x_2) \equiv H(+\infty, x_2)$.
- § F_1 und F_2 sind Verteilungsfunktionen.
- § Beispiel: $C_{\text{Gau\ss}}(\Phi_1(r_1), \Phi_2(r_2))$ als Funktion von r_1 und r_2 .

Verteilungsfunktion von Zufallsvariablen

Definition 4:

Die **Verteilungsfunktion** einer Zufallsvariablen R ist eine Funktion F , die jedem $r \in \overline{\mathfrak{R}}$ eine Wahrscheinlichkeit $F(r) = P(R \leq r)$ zuweist.

Eine **gemeinsame Verteilungsfunktion** zweier Zufallsvariablen R_1 und R_2 ist eine Funktion H , die jedem Paar $r_1, r_2 \in \overline{\mathfrak{R}}$ eine Wahrscheinlichkeit $H(r_1, r_2) = P(R_1 \leq r_1, R_2 \leq r_2)$ zuweist.

Bemerkung:

Eine (gemeinsame) Verteilungsfunktion gemäß Definition 4 ist ebenfalls eine (gemeinsame) Verteilungsfunktion gemäß der Definitionen 2 und 3.

Satz von Sklar

Satz 3 (Satz von Sklar):

Sei H eine gemeinsame Verteilungsfunktion mit Randverteilungen F_1 und F_2 .

Dann gibt es ein Copula C derart, dass

$$H(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \quad (27)$$

für alle $x_1, x_2 \in \overline{\mathfrak{R}}$. Falls F_1 und F_2 stetig sind, dann ist C eindeutig. Andernfalls ist C eindeutig auf $\text{Ran } F_1 \times \text{Ran } F_2$.

Falls andererseits C ein Copula ist und F_1 und F_2 Verteilungsfunktionen sind, dann ist die durch (27) definierte Funktion H eine gemeinsame Verteilungsfunktion mit Randverteilungen F_1 und F_2 .

Bemerkung zum Satz von Sklar

Bemerkung:

Wenn es sich beim Satz von Sklar um Verteilungsfunktionen handelt, die von Zufallsvariablen herrühren, dann kann man Gl. (27) schreiben als

$$H(r_1, r_2) = C(F_1(r_1), F_2(r_2)) = P(R_1 \leq r_1, R_2 \leq r_2) . \quad (28)$$

Zur Namensgebung

- § copulare: lat. für verbinden, verknüpfen
- § engl. Grammatik: Beschreibung eines Ausdruckes, der Subjekt und Prädikat verbindet
- § Erstmalige Benutzung in der Mathematik von Sklar 1959:
„... eine Funktion, die eine mehrdimensionale Verteilung mit ihren eindimensionalen Randverteilungen verbindet.“

Unabhängige Zufallsvariablen

Definition 5:

Zwei Zufallsvariablen R_1 und R_2 sind dann und nur dann **unabhängig**, wenn das Produkt ihrer Verteilungsfunktionen F_1 und F_2 gleich ihrer gemeinsamen Verteilungsfunktion H ist,

$$H(r_1, r_2) = F(r_1) F(r_2) .$$

Satz 4:

R_1 und R_2 seien Zufallsvariablen mit stetigen Verteilungsfunktion F_1 und F_2 und gemeinsamer Verteilungsfunktion H . Nach dem Satz von Sklar gibt es ein eindeutiges Copula $C_{R_1 R_2}$ mit

$$P(R_1 \leq r_1, R_2 \leq r_2) = H(r_1, r_2) = C_{R_1 R_2}(F_1(r_1), F_2(r_2)) .$$

Dann gilt:

R_1 und R_2 sind unabhängig $\Leftrightarrow C_{R_1 R_2} = \Pi$, also $C_{R_1 R_2}(u, v) = uv \quad \forall u, v \in [0, 1]$

Monotonie Verhalten

Satz 5:

R_1 und R_2 seien Zufallsvariablen mit stetigen Verteilungsfunktion. Das zugehörige, eindeutige Copula sei $C_{R_1 R_2}$. Falls a_1 und a_2 streng monoton wachsende Funktionen auf $\text{Ran } R_1$ und $\text{Ran } R_2$ sind, dann gilt

$$C_{a_1(R_1)a_2(R_2)} = C_{R_1 R_2} .$$

M.a.W.:

$C_{R_1 R_2}$ ist invariant unter streng monoton wachsenden Transformationen von R_1 und R_2 .

Inhalt

- 1 - Wiederholung
- 2 - Die „traditionelle“ Monte-Carlo Simulation
- 3 - Copulas
- 4 - Die t-Verteilung
- 5 - Monte-Carlo Simulation und Copulas

Die t-Verteilung 1(3)

Definition:

Die Dichtefunktion der **t-Verteilung** (oder **Student Verteilung**) mit $k = 1, 2, 3, \dots$ Freiheitsgraden ist gegeben durch

$$h_k(r) = \frac{\Gamma(k + 1/2)}{\Gamma(k/2) \Gamma(1/2) \sqrt{k}} \left(1 + \frac{r^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}.$$

Eigenschaften:

§ Gamma-Funktion: $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{p}$, $\Gamma(k + 1) = k \Gamma(k)$

§ $\lim_{k \rightarrow \infty} h_k(r) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \exp\left(\frac{-r^2}{2}\right)$, d.h. die t-Verteilung geht im Limes $k \rightarrow \infty$ in die Standardnormalverteilung über.

Die t-Verteilung 2(3)

Unter der Variablentransformation $r \rightarrow \frac{r - m}{g}$ geht die t-Verteilung über in

$$f_k(r) = \frac{\Gamma(k + 1/2)}{\Gamma(k/2) \Gamma(1/2) \sqrt{k} g} \left(1 + \frac{(r - m)^2}{k g^2} \right)^{-\frac{k+1}{2}} .$$

Eigenschaften:

§ $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(r) = \frac{1}{\sqrt{2p} g^2} \exp\left(\frac{-(r - m)^2}{2 g^2}\right)$, d.h. die modifizierte t-Verteilung geht im Limes $k \rightarrow \infty$ in die Normalverteilung $N(m, g)$ über.

§ In $f_k(r)$ bezeichnet m den Mittelwert der t-Verteilung. Sollte von der Verteilung nur eine Stichprobe S_1, \dots, S_m bekannt sein, kann m geschätzt werden durch

$$\hat{m} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m S_j .$$

Die t-Verteilung 3(3)

Eigenschaften (Fortsetzung):

§ In $f_k(r)$ bezeichnet g^2 **nicht** die Varianz der t-Verteilung. Insbesondere ist die Varianz der t-Verteilung für $k = 1$ und $k = 2$ unendlich.

§ Für $k \geq 3$ gilt

$$f_k(r) = \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k/2) \Gamma(1/2) \sqrt{k-2} s} \left(1 + \frac{(r-m)^2}{(k-2)s^2} \right)^{-\frac{k+1}{2}}, \text{ wobei}$$

$s^2 = \frac{k}{k-2} g^2$ die Varianz der t-Verteilung ist. Diese kann gemäß

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (s_j - \hat{m})^2 \text{ geschätzt werden.}$$

Die Verteilungsfunktion der t-Verteilung 1(2)

Die Verteilungsfunktion der modifizierten t-Verteilung ist gegeben durch

$$F_k(r) = \int_{-\infty}^r dr' f_k(r') = \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k/2) \Gamma(1/2)} (\sqrt{k}S)^k I(r; -2m, kS^2 + m^2, k)$$

mit der Funktion

$$I(r; a, b, k) \equiv \int_{-\infty}^r dr' (r'^2 + ar' + b)^{-\frac{k+1}{2}} .$$

Die Verteilungsfunktion der t-Verteilung 2(2)

Zur Berechnung von $F_k(r)$ können die folgenden Formeln benutzt werden:

Anfangsbedingungen:

$$I(r; a, b, 1) = \frac{2}{\sqrt{4b - a^2}} \left[\arctan\left(\frac{2r + a}{\sqrt{4b - a^2}}\right) + \frac{p}{2} \right] \quad \text{und}$$

$$I(r; a, b, 2) = \frac{2}{4b - a^2} \left(\frac{2r + a}{\sqrt{r^2 + ar + b}} + 2 \right)$$

Rekursionsformeln für $k \geq 3$:

$$I(r; a, b, k) = \frac{4r + 2a}{(k - 1)(4b - a^2)} (r^2 + ar + b)^{-\frac{k-1}{2}} + \frac{4k - 8}{(k - 1)(4b - a^2)} I(r; a, b, k - 2)$$

Inhalt

- 1 - Wiederholung
- 2 - Die „traditionelle“ Monte-Carlo Simulation
- 3 - Copulas
- 4 - Die t-Verteilung
- 5 - Monte-Carlo Simulation und Copulas

Idee

Die „traditionelle“ Monte-Carlo Simulation zur Berechnung des VaR soll modifiziert werden, d.h.

„traditionelles“ MC	Copula MC
Annahme: Jeder Risikofaktor ist (log-) normalverteilt	Annahme: Jeder Risikofaktor genügt einer bekannten Verteilung
Annahme: Die Abhängigkeit der Risikofaktoren untereinander wird durch eine Multinormalverteilung beschrieben	Annahme: Die Abhängigkeit der Risikofaktoren untereinander wird durch ein bekanntes Copula beschrieben
Num. Bestimmung der Parameter der Randverteilungen u. der Korrelationen	Num. Bestimmung der Parameter der Randvert. und der Copula Parameter



Numerische Generierung von Szenarien der Risikofaktoren

Festlegung der Randverteilungen und des Copulas

Zunächst müssen die Randverteilungen und das Copula „geraten“ werden. Wenn man mit diesen geratenen Funktionen eine VaR Berechnung durchführt und diese über einen längeren Zeitraum via **Backtesting** verifiziert, so kann man die benutzten Randverteilungen und das Copula als geeignet ansehen.

Beispiele:

1) „Traditionelle“ MC Simulation:

Randverteilungen = Normalverteilungen

Copula = Gaußsches Copula

2) Alternative (Rank 2000; Rank, Siegl 2002):

Randverteilungen = Normalverteilungen

Copula = Gumbel-Hougaard Copula (und 16 weitere Copulas)

3) Diese Vorlesung (Rank 2002):

Randverteilungen = **t-Verteilungen** (zur Vermeidung der „fat-tail“ Problematik)

Copula = **Gumbel-Hougaard Copula** und **Frank Copula**

Bestimmung der Parameter der Randverteilungen

Die Parameter der Randverteilungen und des Copulas werden aus historischen Daten der Risikofaktoren über den zur Verfügung stehenden historischen Horizont ermittelt.

Beispiele für die Parameter der Randverteilungen:

1) Randverteilungen = Normalverteilungen

Schätzer für die Mittelwerte: $\hat{m}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m S_i(t_j)$ für $i = 1, 2$

Schätzer für die Varianzen: $\hat{s}_i^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (S_i(t_j) - \hat{m}_i)^2$ für $i = 1, 2$

2) Randverteilungen \neq Normalverteilungen

Schätzer für die Parameter der Verteilungen ggf. via Maximum-Likelihood Verfahren

Beispiel: Bestimmung der Parameter der Randverteilungen

Annahme:

Jede Randverteilung wird durch eine t-Verteilung beschrieben.

Dann müssen für jede Randverteilung die folgenden Schritte durchgeführt werden:

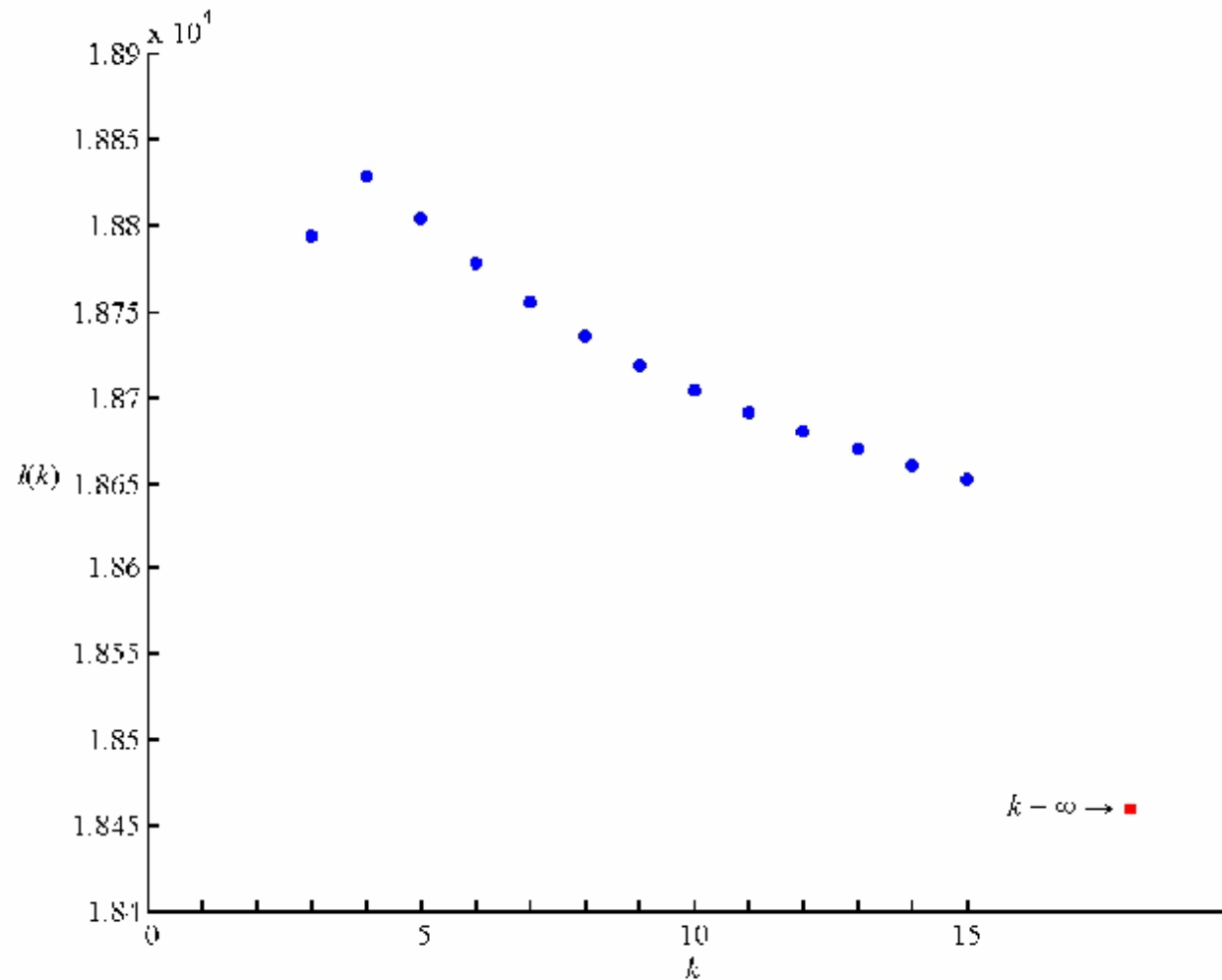
- (1) Bestimmung der Schätzer für die Mittelwerte und die Varianzen wie oben.
- (2) Bestimmung der Parameter \hat{k}_1 und \hat{k}_2 mittels Maximum-Likelihood Methode.

Likelihood Funktion: $L(k_i) \equiv L(S_i(t_1), \mathbf{K}, S_i(t_m); \mathbf{m}_i, \mathbf{s}_i, k_i) \Big|_{\mathbf{m}_i = \hat{\mathbf{m}}_i, \mathbf{s}_i = \hat{\mathbf{s}}_i} = \prod_{j=1}^m f_{k_i}(S_i(t_j))$

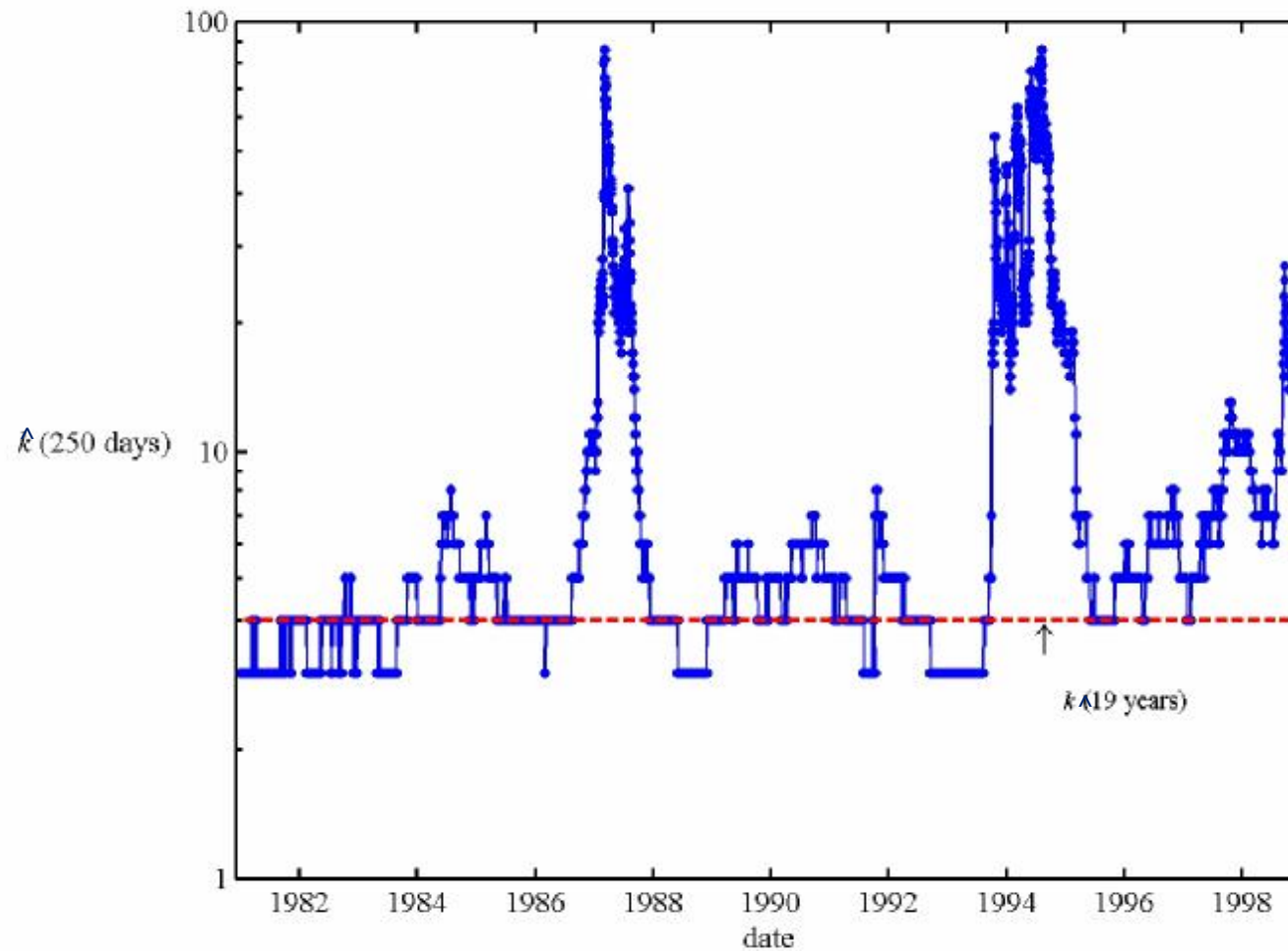
Schätzwerte der Parameter:

$$\hat{k}_i = \{k_{i,\max} \mid \log L(k_{i,\max}) \geq \log L(k_i) \quad \forall k_i = 3, 4, 5, \dots\} \quad \text{für } i = 1, 2$$

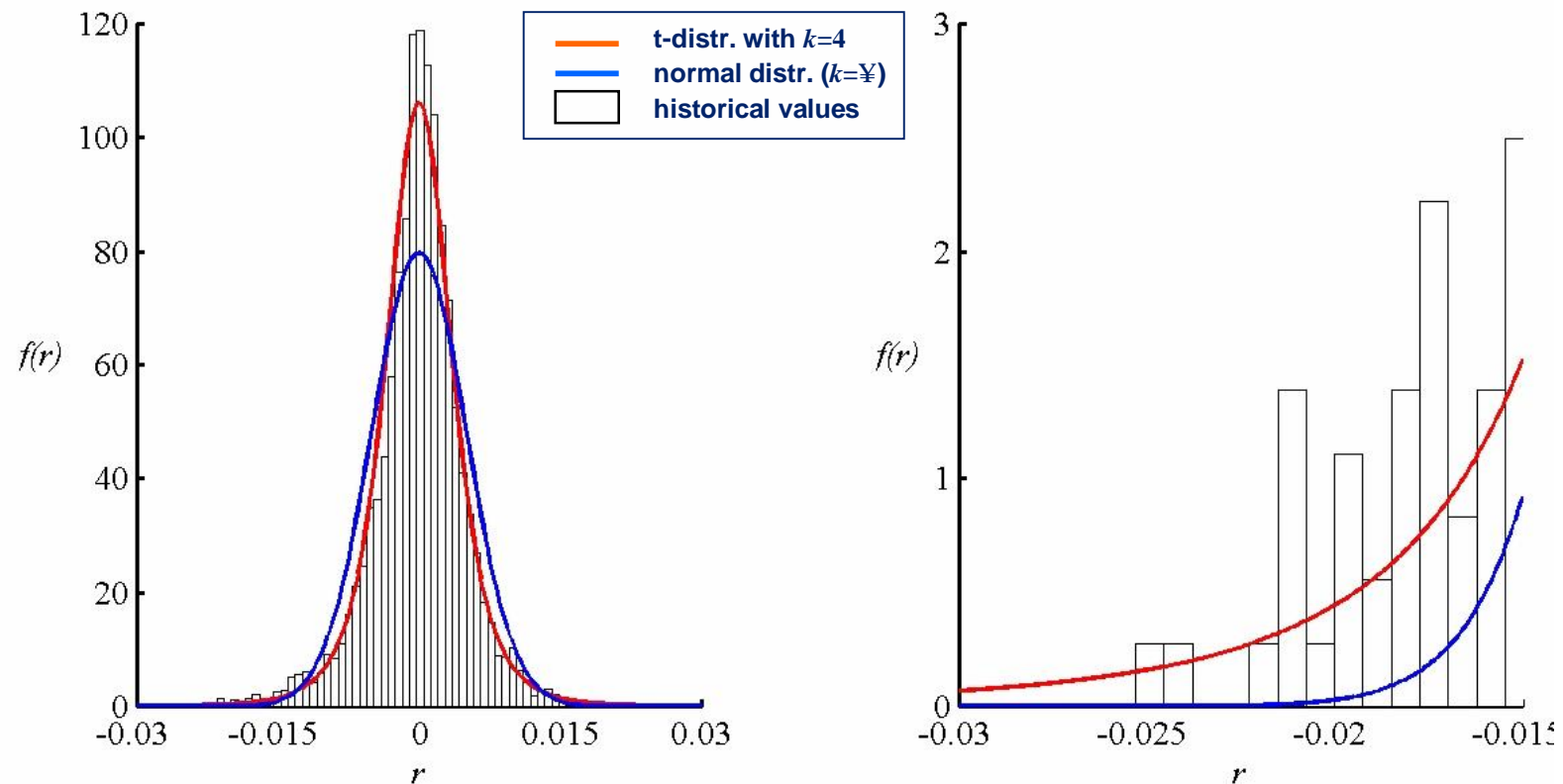
Beispiel: Schätzung der Parameter der Randverteilung für die relativen GBP/DEM FX-Kurse (1980 – 1998) 1(3)



Beispiel: Schätzung der Parameter der Randverteilung für die relativen GBP/DEM FX-Kurse (1980 – 1998) 2(3)



Beispiel: Schätzung der Parameter der Randverteilung für die relativen GBP/DEM FX-Kurse (1980 – 1998) 3(3)



Bestimmung des Copula Parameters 1(2)

Beispiele für die Copula Parameter:

1) Copula = Gaußsches Copula

Schätzer für die Korrelationen:

$$\hat{c}_{i,j} = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (S_i(t_k) - \hat{m}_i)(S_j(t_k) - \hat{m}_j) \quad \text{für } i, j = 1, 2$$

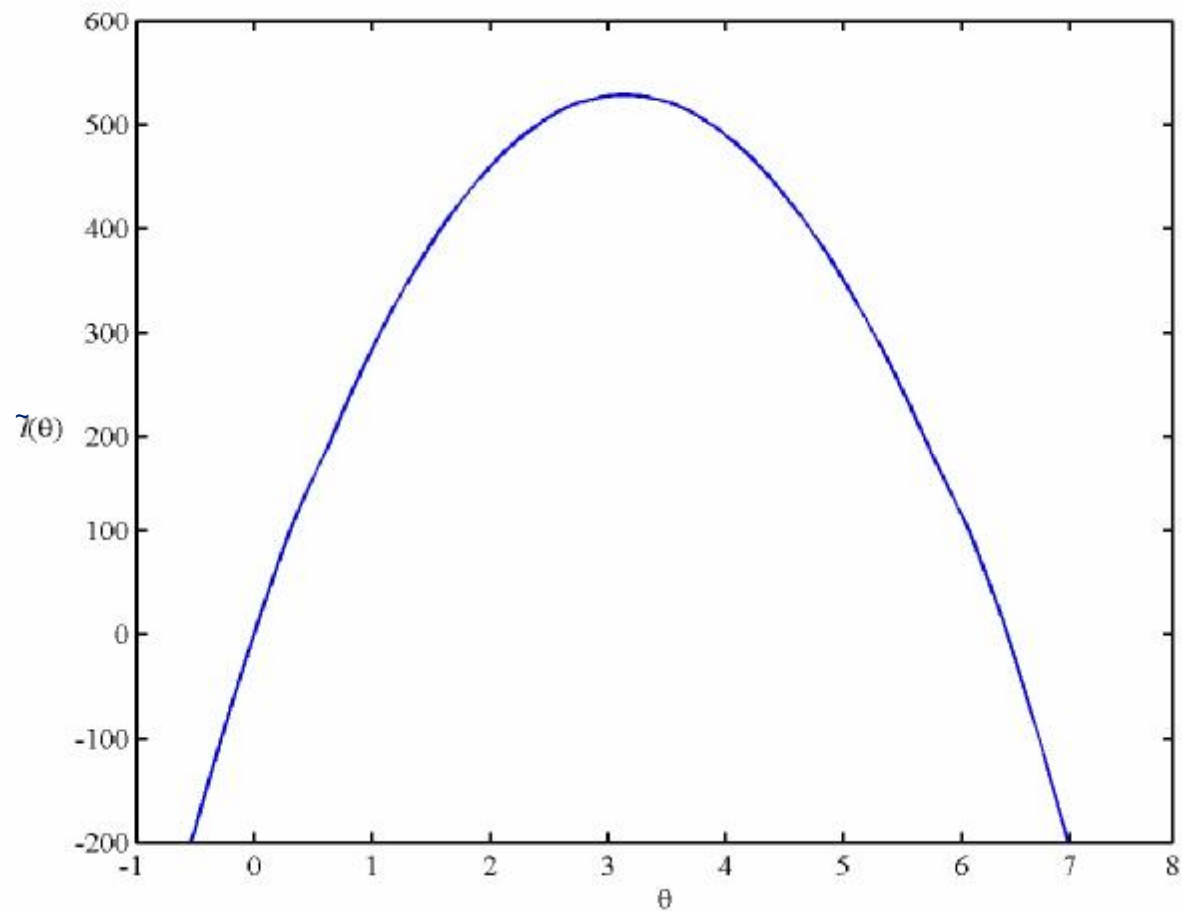
2) Copula = von einem Parameter q abhängige Copula Familie

Schätzer für den Copula Parameter via Maximum-Likelihood Verfahren:

Wahrscheinlichkeitsdichte: $f_q(r_1, r_2) = \frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_2} C_q(F_1(r_1), F_2(r_2))$

Likelihood Funktion: $L(q) = \prod_{k=1}^m f_q(S_1(t_k), S_2(t_k))$

Beispiel: Bestimmung des Parameters für das Frank Copula



modifizierte Likelihood Funktion $\tilde{\gamma}(q)$ vs. q

Erzeugung von Pseudo Zufallszahlen gemäß einem bekannten Copula 1(2)

Sei C_q das relevante Copula. Wir betrachten zunächst zwei auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen U und V , die C_q als gemeinsame Verteilungsfunktion haben.

Nach (28) gilt

$$C_q(u, v) = C_q(F_{\text{uniform}}(u), F_{\text{uniform}}(v)) = P(U \leq u, V \leq v), \quad (29)$$

wobei F_{uniform} die Verteilungsfunktion der Gleichverteilung auf $[0,1]$ ist, also $F_{\text{uniform}}(u) = u$ für $u \in [0,1]$.

Die bedingte Verteilungsfunktion $P(U = u, V \leq v)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} P(U = u, V \leq v) &= \frac{\partial P(U \leq u, V \leq v)}{\partial u} \\ \Rightarrow P(U = u, V \leq v) &= \frac{\partial C_q(u, v)}{\partial u} = C_{q,u}(v). \end{aligned} \quad (30)$$

Erzeugung von Pseudo Zufallszahlen gemäß einem bekannten Copula 2(2)

Annahme zur Vereinfachung: $C_{q,u}$ existiert für alle $v \in [0,1]$ und ist streng monoton.

Benutze die Methode der Variablentransformation zur Erzeugung des gesuchten Paares von Pseudo-ZZ:

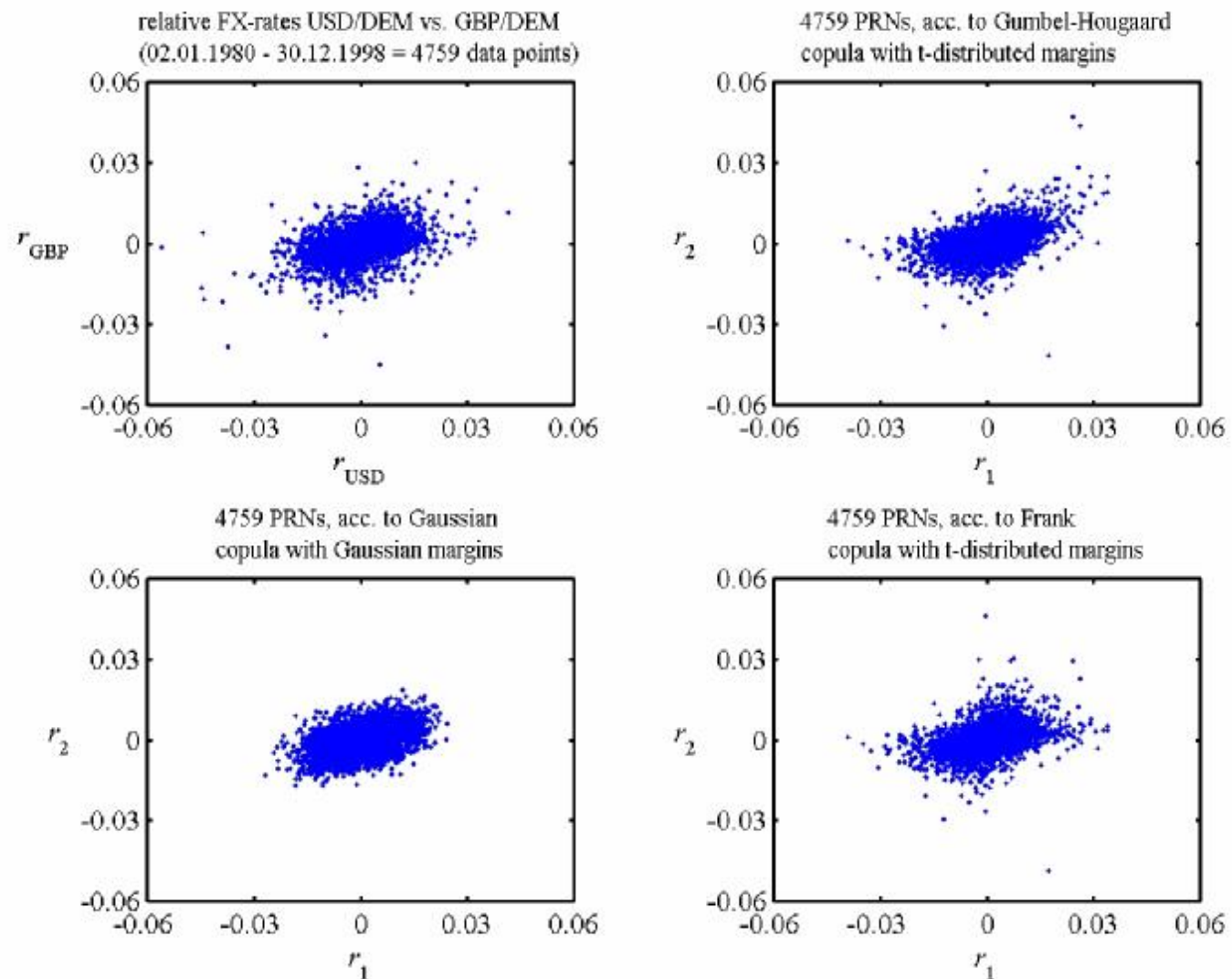
- 1) Erzeuge zwei unabhängige, auf $[0,1]$ gleichmäßig verteilte Pseudo-ZZ u und w .
- 2) Setze $v = C_{q,u}^{-1}(w)$.

Dann ist (u,v) ein Paar von Pseudo-ZZ, die auf $[0,1] \times [0,1]$ gleichmäßig verteilt sind und als gemeinsame Verteilungsfunktion C_q haben.

Um die Verteilungsfunktionen F_1 und F_2 der gesuchten Zufallsvariablen R_1 und R_2 zu berücksichtigen, setze man $u = F_1(r_1)$ und $v = F_2(r_2)$. Dann folgt

- 3) $r_1 = F_1^{-1}(u)$ und $r_2 = F_2^{-1}(v)$ sind Pseudo-ZZ mit Verteilungsfunktionen F_1 und F_2 und gemeinsamer Verteilungsfunktion C_q .

Beispiele für Pseudo Zufallszahlen



Risikofaktoren und Randverteilungen

Risikofaktoren:

DEM Wechselkurse bzgl. der folgenden Währungen: USD, GBP, JPY, CHF, FRF

Beobachtungszeitraum: 02.01.1980 - 30.12.1998

Historischer Horizont: 250 Bankarbeitstage

Risikofaktoren: $S_j = \frac{x_j - x_{j-1}}{x_{j-1}}$ für $j = 1, \mathbf{K}, 249$, mit x_j
als Wechselkurs <Curr> / DEM zur Zeit j

Beispiel: Randverteilungen für den ges. Beobachtungszeitraum:

FRF / DEM: t_3 - Verteilung

GBP / DEM: t_4 - Verteilung

CHF / DEM: t_5 - Verteilung

JPY / DEM: t_5 - Verteilung

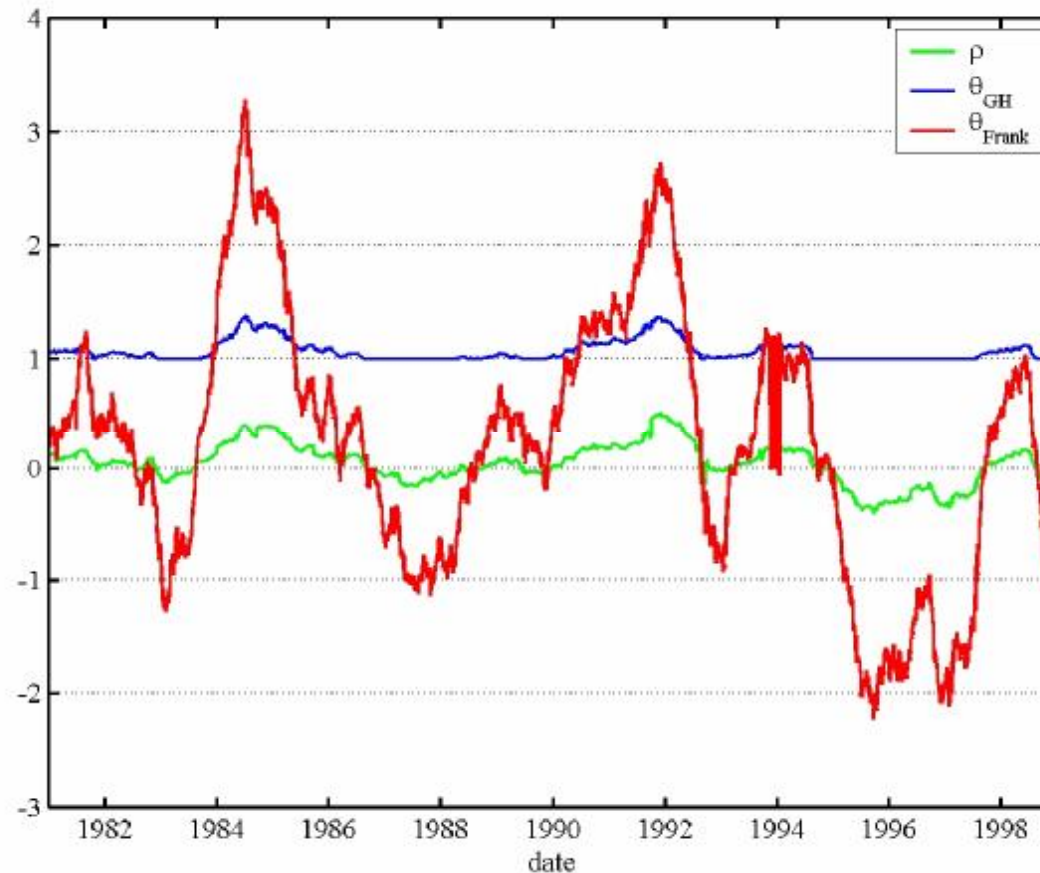
USD / DEM: t_6 - Verteilung

Benutzte Copulas

Copulas:

- § Gaußsches Copula mit Gaußschen Randverteilungen „traditional“ MC
- § Gumbel-Hougaard Copula mit t-verteilten Randverteilungen } Copula MC
- § Frank Copula mit t-verteilten Randverteilungen }

Parameter zur Beschreibung der Abhängigkeit



lineare Korrelation (grün), Gumbel-Hougaard Copula Parameter (blau) und Frank Copula Parameter (rot) der relativen Wechselkurse CHF/DEM und GBP/DEM

Diskussion der Ergebnisse 1(2)

- § Das qualitative Verhalten der linearen Korrelation und des Frank Copula Parameters sind ähnlich.
- § Beide Parameter ($r_{1,2}$ und q_{Frank}) streben in der gleichen Region gegen die signifikanten Werte $r_{1,2} \rightarrow 0$ und $q_{\text{Frank}} \rightarrow 0$.
⇒ Beide Methoden interpretieren die Daten qualitativ gleich (Unabhängigkeit!)
- § Das Gumbel-Hougaard Copula ist nur für positive Abhängigkeiten geeignet.

Numerische Backtesting Ergebnisse 1(2)

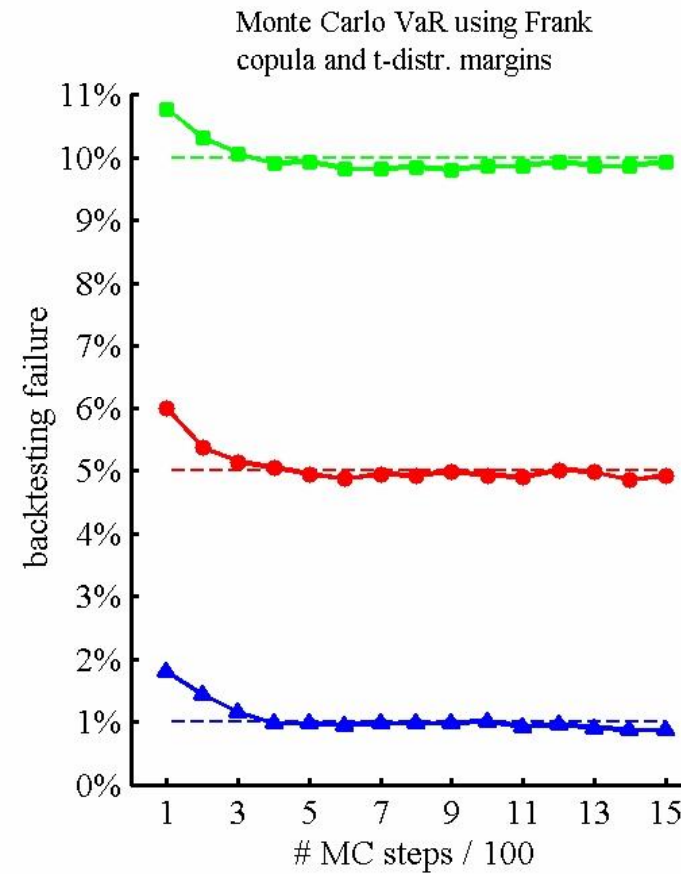
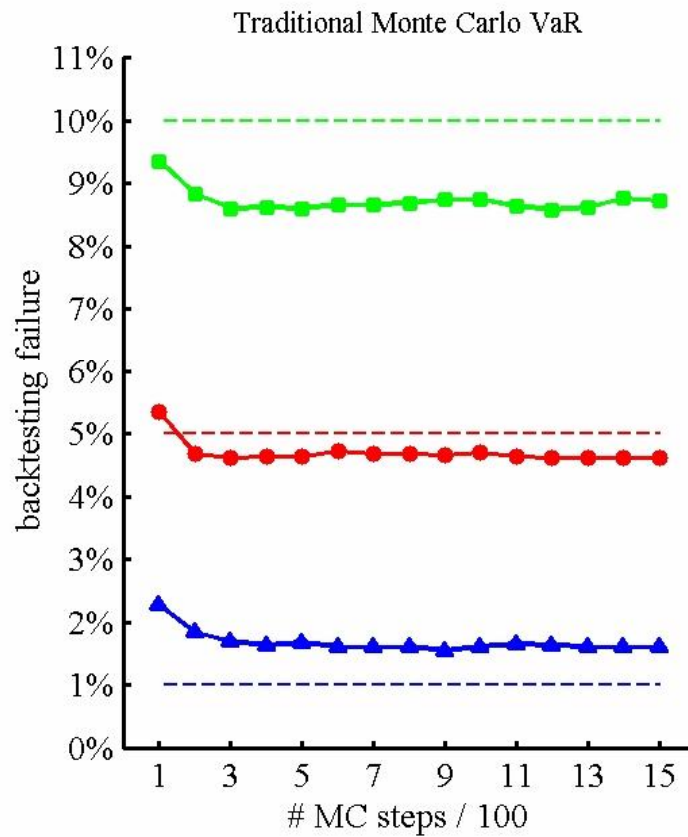
Beispiel:

Betrachte den DEM Wert des linearen Portfolios

$$F = 1640 \times \text{USD} - 1000 \times \text{GBP}.$$

Anzahl MC Iterationen: 100 - 1500

Numerische Backtesting Ergebnisse 2(2)



Diskussion der Ergebnisse 2(2)

- § Ab ca. 600 MC Iterationsschritten sind für beide Methoden und alle drei betrachteten Konfidenzniveaus die Backtesting Ergebnisse (und auch die VaR-Werte) stabil.
- § Die Copula Methode zur Bestimmung des VaR funktioniert!
- § In dem betrachteten Beispiel liefert die Copula Methode zuverlässigere Werte als die „traditionelle“ MC Simulation.
Beispiel für 1500 Iterationen:

Quantil a	Anteil unterschätzter Verluste			
	„traditionell“	Frank Copula	Var.-Kovar.	Hist. Sim.
10%	8.71%	9.93%	8.60%	10.33%
5%	4.61%	4.92%	4.63%	5.32%
1%	1.62%	0.89%	1.40%	1.22%

Vor- und Nachteile der Copula Methode

Vorteile:

- + Die Wahl der Randverteilungen ist frei.
⇒ „Fat-Tail“ Problematik kann vermieden werden.
- + Die Wahl der gemeinsamen Verteilungsfunktion ist frei.
⇒ Bessere Modellierung extremer Ereignisse möglich.

Nachteile:

- Das Verfahren funktioniert (bislang) nur für zwei Risikofaktoren.
- Zahlreiche zeitintensive Rechenschritte:
 - Berechnung zahlreicher Iterationen ($O(1000)$)
 - Numerische Inversion der Verteilungsfunktionen der Randverteilungen u.U. notwendig
 - Maximum Likelihood Verfahren
- Das Verfahren ist noch nicht etabliert, kann also nur ergänzend benutzt werden.

Literatur

- § H.-P. Deutsch, 3. Auflage 2004, *Derivate und Interne Modelle*, Schäffer und Pöschel
- § R. B. Nelsen, 1999, *An Introduction to Copulas*, Springer Verlag
- § J. Rank, T. Siegl, 2002, *Application of Copulas for the Calculation of Value-at-Risk*, in W. Härdle, T. Kleinow, G. Stahl, *Applied Quantitative Finance*, Springer Verlag
- § J. Rank, November 2002, *Improving Value at Risk Calculations by Using Copulas and Non-Gaussian Margins*, Master Thesis an der Universität Oxford, http://www.d-fine.de/pool/bibliothek/ox_jra_02.pdf

Eine elektronische Version dieser Vorlesung kann von der d-fine Internetseite heruntergeladen werden:
<http://www.d-fine.de> → Bibliothek → Vorlesungen

Ihr Ansprechpartner

Dr. Jörn Rank

Tel. 069-90737-316, joern.rank@d-fine.de



d-fine GmbH

Opernplatz 2

60313 Frankfurt am Main

Germany

T: +49 69-90737-0

F: +49 69-90737-200

www.d-fine.de