

FINANZMATHEMATIK

in stetiger Zeit

STEFAN EBENFELD

d-fine GmbH

Opernplatz 2

D-60313 Frankfurt am Main

www.d-fine.de

stefan.ebenfeld@d-fine.de

Contents

1	Einführung	3
1.1	Glücksspiel	3
1.2	Bewertung von Optionen und anderen Derivaten	4
2	Stochastische Analysis	10
2.1	Grundbegriffe	10
2.2	Martingale	14
2.3	Brownsche Bewegungen	15
2.4	Stochastische Integrale	17
2.5	Itoscher Kalkül	34
2.6	Stochastische Differentialgleichungen	56
2.7	Beispiel: Lineare stochastische Differentialgleichungen	63
2.8	Diffusionsgleichungen	65
2.9	Brownsche Martingale	73
2.10	Wechsel des Wahrscheinlichkeitsmaßes	79
3	Finanzmärkte	86
3.1	Modellierung von Aktienmärkten	86
3.2	Derivate mit europäischem Ausübungsrecht	92
3.3	Derivate mit amerikanischem Ausübungsrecht	99
3.4	Feynman–Kac–Formeln für Derivate	107
3.5	Modellierung von Bondmärkten	110
	Literatur	119

1 Einführung

1.1 Glücksspiel

Glücksspiel

Geworfen wird eine Münze. Falls die Münze 'Wappen' zeigt, dann erhält der Spieler zwei Geldeinheiten. Andernfalls, d.h. wenn die Münze 'Zahl' zeigt, erhält er nichts.

Problemstellung

Welches ist der faire Preis für die Teilnahme an dem Glücksspiel?

Stochastisches Modell

- Wir betrachten die folgenden Zeitpunkte:

$$t \in T := \{0, 1\}.$$

Dabei bezeichnet $t = 0$ einen Zeitpunkt vor dem Münzwurf und $t = 1$ einen Zeitpunkt nach dem Münzwurf.

- Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

$$\omega \in \Omega := \{A, B\}.$$

Dabei bezeichnet $\omega = A$ den Ausgang 'Wappen' und $\omega = B$ den Ausgang 'Zahl' des Münzwurfes.

- Wir betrachten die elementaren Wahrscheinlichkeiten $P(\omega)$ der möglichen Ereignisse. Dabei nehmen wir an, dass die beiden möglichen Ausgänge, 'Wappen' und 'Zahl', des Münzwurfes jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ vorkommen:

$$P : \Omega \longrightarrow [0, 1] : \omega \longmapsto P(\omega).$$

$$P(A) := \frac{1}{2};$$

$$P(B) := \frac{1}{2}.$$

- Wir betrachten ferner die Auszahlung $X(1, \omega)$ des Glücksspiels zur Zeit $t = 1$ an den teilnehmenden Spieler in Abhängigkeit vom Ausgang des Münzwurfes:

$$X(1) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \longmapsto X(1, \omega).$$

$$X(1, A) := 2;$$

$$X(1, B) := 0.$$

- Wir betrachten schließlich den fairen Preis $X(0)$ für die Teilnahme an dem Glücksspiel:

$$X(0) \in \mathbb{R}.$$

Fairer Preis

Unter dem fairen Preis wollen wir den größten Geldbetrag verstehen, den ein Spieler gerade noch als Gebühr für die Teilnahme an dem Glücksspiel akzeptieren würde. Dabei nehmen wir an, dass ein Spieler genau dann an dem Spiel teilnimmt, wenn seine Gewinnerwartung mindestens genau so groß wie sein Einsatz, also die Teilnahmegebühr, ist. Damit gilt:

Der faire Preis für die Teilnahme an dem Glücksspiel ist gegeben durch:

$$X(0) := E_P[X(1)] = 2 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Dabei bezeichnet allgemein $E_P[Z]$ den *Erwartungswert* der Zufallsvariablen Z bzgl. P :

$$E_P[Z] := \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega) P(\omega).$$

1.2 Bewertung von Optionen und anderen Derivaten

Finanzmarktmodell

Wir betrachten einen idealisierten Finanzmarkt, an welchem nur eine einzige Aktie gehandelt wird. Dabei nehmen wir zur weiteren Vereinfachung an, dass der gegenwärtige Preis der Aktie genau zwei Geldeinheiten beträgt, und dass sich zu einem gegebenen zukünftigen Zeitpunkt der Preis der Aktie entweder genau verdoppelt oder genau halbiert haben wird. Wir betrachten ferner eine Option auf diese Aktie, welche ihrem Halter das Recht, aber nicht die Pflicht, einräumt, zu dem betrachteten zukünftigen Zeitpunkt die Aktie zum Preis von zwei Geldeinheiten zu erwerben.

Problemstellung

Welches ist der faire Preis für die Option?

Stochastisches Modell

- Wir betrachten die folgenden Zeitpunkte:

$$t \in T := \{0, 1\}.$$

Dabei bezeichnet $t = 0$ die Gegenwart und $t = 1$ einen zukünftigen Zeitpunkt.

- Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

$$\omega \in \Omega := \{A, B\}.$$

Dabei bezeichnet $\omega = A$ das Ereignis, dass sich der Preis der Aktie zwischen den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$ verdoppelt, und $\omega = B$ bezeichnet das Ereignis, dass sich der Preis der Aktie zwischen den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$ halbiert.

- Wir betrachten die elementaren Wahrscheinlichkeiten $P(\omega)$ der möglichen Ereignisse. Dabei nehmen wir an, dass die beiden möglichen Fälle, Verdoppelung und Halbierung des Preises der Aktie, jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ vorkommen:

$$P : \Omega \longrightarrow [0, 1] : \omega \longmapsto P(\omega).$$

$$P(A) := \frac{1}{2}; \qquad P(B) := \frac{1}{2}.$$

- Wir betrachten den Preis der Aktie $S(0)$ zur Zeit $t = 0$ sowie den Preis der Aktie $S(1, \omega)$ zur Zeit $t = 1$ in Abhängigkeit von der Preiseinwicklung:

$$S(0) := 2.$$

$$S(1) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \longmapsto S(1, \omega).$$

$$S(1, A) := 4; \qquad S(1, B) := 1.$$

- Wir betrachten die Auszahlung $X(1, \omega)$ der Option zur Zeit $t = 1$ an den Halter in Abhängigkeit von der Preiseinwicklung:

$$X(1) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \longmapsto X(1, \omega).$$

$$X(1, \omega) := \max\{S(1, \omega) - 2, 0\}.$$

Insbesondere gilt:

$$X(1, A) = 2; \qquad X(1, B) = 0.$$

- Wir betrachten schließlich den fairen Preis $X(0)$ der Option:

$$X(0) \in \mathbb{R}.$$

Spieletheoretischer fairer Preis

Die stochastischen Modelle für das Glücksspiel und für den Finanzmarkt stimmen formal überein. Dabei entspricht der Halter der Option dem Spieler, und die durch die Option garantierte Auszahlung entspricht dem Gewinn beim Glücksspiel. Wir definieren den *spieletheoretischen fairen Preis* der Option analog zum fairen Preis für die Teilnahme an dem Glücksspiel:

$$X(0) := E_P[X(1)] = 2 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Bemerkung

Obwohl die stochastischen Modelle für das Glücksspiel und für den Finanzmarkt formal übereinstimmen, gibt es doch einen wesentlichen Unterschied. Dieser Unterschied wird uns im Folgenden zur Definition des risikoneutralen fairen Preises der Option führen. Der risikoneutrale faire Preis der Option wiederum wird sich als ein für die gesamte Finanzmathematik tragfähiges Konstrukt erweisen, welches wir als *Prinzip der risikoneutralen Bewertung* bezeichnen. Der wesentliche Unterschied nun zwischen der Situation für den Spieler in unserem Glücksspiel und der Situation für den Investor an unserem Finanzmarkt besteht in den unterschiedlichen Möglichkeiten, das vorhandene Kapital zu investieren. Der Spieler hat neben der Teilnahme an dem Glücksspiel nur eine weitere Möglichkeit, sein Kapital zu investieren, nämlich zu sparen. Der Investor hat dagegen neben dem Erwerb der Option zwei weitere Möglichkeiten, sein Kapital zu investieren, nämlich entweder zu sparen oder aber Aktien zu erwerben.

Prinzip der risikoneutralen Bewertung

Wir betrachten ein *Portfolio* $V[H](t)$, welches aus H_0 Geldeinheiten sowie H_1 Aktien besteht ($H_0, H_1 \in \mathbb{R}$):

$$V[H](0) := H_0 + H_1 S(0).$$

$$V[H](1, \omega) := H_0 + H_1 S(1, \omega).$$

Die Grundidee des Prinzips der risikoneutralen Bewertung besteht nun darin, zur Zeit $t = 0$ ein Portfolio so zusammenzustellen, dass es zur Zeit $t = 1$ genau denselben Wert besitzt wie die Auszahlung der Option. Ein solches Portfolio bezeichnen wir als *replizierendes Portfolio* für die Option. Dazu bestimmen wir eine *Handelsstrategie* $H \in \mathbb{R}^2$ durch folgenden Ansatz:

$$V[H](1, \omega) \stackrel{!}{=} X(1, \omega).$$

Auswertung dieser Gleichung für $\omega = A$ und $\omega = B$ liefert:

$$H_0 + 4H_1 = 2.$$

$$H_0 + H_1 = 0.$$

Dieses lineare Gleichungssystem besitzt die folgende eindeutig bestimmte Lösung:

$$H_0 = -\frac{2}{3}; \qquad H_1 = \frac{2}{3}.$$

Risikoneutraler fairer Preis

Das replizierende Portfolio besitzt zur Zeit $t = 1$ genau denselben Wert wie die Auszahlung

der Option. Wir definieren den *risikoneutralen fairen Preis* der Option als den Wert des replizierenden Portfolios zur Zeit $t = 0$:

$$X(0) := V[H](0) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}.$$

Vergleich der beiden fairen Preise

Sei $X(0)$ der risikoneutrale faire Preis, und sei $Y(0)$ der Marktpreis der Option.

1. Sei zuerst $Y(0) < X(0)$. In diesem Falle kann ein Investor zur Zeit $t = 0$ die Option zum Preis von $Y(0)$ am Markt erwerben und gleichzeitig das replizierende Portfolio zum Preis von $X(0)$ am Markt verkaufen. Zur Zeit $t = 1$ hat aber die Option denselben Wert wie das replizierende Portfolio, so dass der Investor die Option ausüben und mit der Auszahlung das replizierende Portfolio am Markt zurückerwerben kann.
2. Sei nun $Y(0) > X(0)$. In diesem Falle kann ein Investor zur Zeit $t = 0$ die Option zum Preis von $Y(0)$ am Markt verkaufen und gleichzeitig das replizierende Portfolio zum Preis von $X(0)$ am Markt erwerben. Zur Zeit $t = 1$ hat aber die Option denselben Wert wie das replizierende Portfolio, so dass der Investor das replizierende Portfolio am Markt verkaufen und mit dem Erlös die Auszahlung der Option begleichen kann.

In beiden Fällen ergibt sich also die Situation, dass ein Investor zur Zeit $t = 0$ am Markt eine Transaktion tätigen kann, welche ihm folgenden Gewinn bringt:

$$|X(0) - Y(0)| > 0.$$

Darüber hinaus kann der Investor zur Zeit $t = 1$ alle Verbindlichkeiten tilgen, ohne Geld investieren zu müssen. Eine solche Form der risikolosen Gewinnmöglichkeit bezeichnen wir als *Arbitragemöglichkeit*. Arbitragemöglichkeiten können aber für reale Finanzmärkte i.d.R. aus folgendem Grund als unrealistisch betrachtet werden:

Gäbe es nämlich eine solche Arbitragemöglichkeit in einem realen Finanzmarkt, dann würden die Investoren versuchen, diese wie oben beschrieben auszunutzen. Dabei müssten alle Investoren zur gleichen Zeit dieselbe Aktie kaufen bzw. verkaufen. Dies hätte wiederum eine Verschiebung von Angebot und Nachfrage der Aktie zur Folge, welche wiederum die ihren Marktpreis derartig beeinflussen würde, dass die Arbitragemöglichkeit verschwände.

Deshalb betrachten wir den risikoneutralen fairen Preis als den ökonomisch sinnvollen Preis für die Option.

Martingalmaß

Wir hatten gesehen, dass der spieltheoretische faire Preis für die Option gegeben war als

Erwartungswert der Auszahlung $X(1)$ der Option bzgl. des realen Wahrscheinlichkeitsmaßes P auf Ω . Dies legt die Frage nahe, ob es nicht ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf Ω gibt, so dass der risikoneutrale faire Preis der Option gegeben ist als Erwartungswert der Auszahlung $X(1)$ der Option bzgl. dieses *risikoneutralen* Wahrscheinlichkeitsmaßes. Dazu betrachten wir ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf Ω :

$$Q : \Omega \longrightarrow [0, 1] : \omega \longmapsto Q(\omega).$$

$$Q(A) + Q(B) = 1.$$

Nach Definition ist Q genau dann risikoneutral, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$X(0) \stackrel{!}{=} E_Q[X(1)].$$

Dabei ist der risikoneutrale faire Preis der Option genau der Wert des replizierenden Portfolios zur Zeit $t = 0$. Deshalb ist Q genau dann risikoneutral, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$V[H](0) \stackrel{!}{=} E_Q[V[H](1)].$$

Dabei gilt:

$$V[H](0) = H_0 + H_1 S(0).$$

$$\begin{aligned} E_Q[V[H](1)] &= V[H](1, A) Q(A) + V[H](1, B) Q(B) \\ &= (H_0 + H_1 S(1, A)) Q(A) + (H_0 + H_1 S(1, B)) Q(B) \\ &= H_0 + H_1 (S(1, A) Q(A) + S(1, B) Q(B)). \end{aligned}$$

Also ist Q genau dann risikoneutral, wenn der Preis der Aktie ein *Martingal* bzgl. Q ist, d.h. wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$E_Q[S(1)] = S(1, A) Q(A) + S(1, B) Q(B) \stackrel{!}{=} S(0).$$

In diesem Falle bezeichnen wir Q als *Martingalmaß*. Einsetzen von $S(0)$, $S(1, A)$ und $S(1, B)$ liefert:

$$4 Q(A) + Q(B) = 2.$$

Damit erhalten wir insgesamt das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} Q(A) + Q(B) &= 1. \\ 4 Q(A) + Q(B) &= 2. \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem wiederum besitzt die folgende eindeutig bestimmte Lösung:

$$Q(A) = \frac{1}{3}; \qquad Q(B) = \frac{2}{3}.$$

Insbesondere gibt es genau ein Martingalmaß Q auf Ω .

Prinzip der risikoneutralen Bewertung

Der risikoneutrale faire Preis der Option ist gegeben durch:

$$X(0) = E_Q[X(1)].$$

2 Stochastische Analysis

2.1 Grundbegriffe

Definition

Sei Ω eine beliebige Menge. Ω heisst *Wahrscheinlichkeitsraum*.

Definition

Sei $I = [0, T]$ oder $I = [0, \infty)$. I heisst *Zeitintervall*.

Definition

Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}[\Omega]$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. $A \in \mathcal{F} \implies \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$.
3. $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F} \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

\mathcal{F} heisst σ -Algebra.

Definition

Sei $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}[\mathbb{R}]$ die kleinste σ -Algebra, welche alle offenen Mengen enthält. \mathcal{B} heisst *Borelsche σ -Algebra*.

Definition

Sei $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $P(\emptyset) = 0$ und $P(\Omega) = 1$.
2. $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ paarweise disjunkt $\implies P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$.

P heisst *Wahrscheinlichkeitsmaß*.

Definition

Sei \mathcal{F} *vollständig*, d.h.:

$$A \subset \Omega \text{ ist } P\text{-Nullmenge} \implies A \in \mathcal{F}.$$

Definition

Sei $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ ein Netz von σ -Algebren mit folgender Eigenschaft:

$\forall t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$:

$$\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2} \subset \mathcal{F}.$$

$(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ heisst *Filtration*.

Definition

(a) Sei $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ *augmentiert*, d.h.:

\mathcal{F}_0 ist vollständig.

(b) Sei $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ *stetig*, d.h.:

$\forall t \in I$:

$$\mathcal{F}_t = \bigcup_{\substack{s \in I \\ s < t}} \mathcal{F}_s = \bigcap_{\substack{s \in I \\ s > t}} \mathcal{F}_s.$$

Definition

Sei $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{F}/\mathcal{B} -messbar, d.h.:

$$A \in \mathcal{B} \quad \implies \quad Z^{-1}(A) \in \mathcal{F}.$$

Z heisst *Zufallsvariable*.

Definition

Sei Z P -integrierbar.

(a) Wir schreiben:

$$E_P[Z] := \int_{\Omega} Z(\omega) \, dP(\omega).$$

$E_P[Z]$ heisst der *Erwartungswert* von Z .

(b) Sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine σ -Algebra, und sei $E_P[Z|\mathcal{G}]$ die eindeutig bestimmte Zufallsvariable mit folgenden Eigenschaften:

1. $E_P[Z|\mathcal{G}]$ ist \mathcal{G}/\mathcal{B} -messbar.
2. $\forall A \in \mathcal{G}$:

$$\int_A E_P[Z|\mathcal{G}](\omega) \, dP(\omega) = \int_A Z(\omega) \, dP(\omega).$$

$E_P[Z|\mathcal{G}]$ heisst der *bedingte Erwartungswert* von Z unter \mathcal{G} .

Definition

(a) Sei $X : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $(\mathcal{B} \times \mathcal{F})/\mathcal{B}$ -messbar, d.h.:

$$A \in \mathcal{B} \quad \Longrightarrow \quad X^{-1}(A) \in \mathcal{B} \times \mathcal{F}.$$

X heisst *stochastischer Prozess*. Wir schreiben:

$$X_t(\omega) := X(t, \omega).$$

$$(X_t)_{t \in I} := X.$$

(b) Sei $\omega \in \Omega$. Die Abbildung $I \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto X(t, \omega)$ heisst *Pfad* von X .

Definition

(a) X heisst *adaptiert*, falls gilt:

$$\forall t \in I:$$

$$X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ist } \mathcal{F}_t/\mathcal{B}\text{-messbar.}$$

(b) X heisst *progressiv messbar*, falls gilt:

$$\forall t \in I:$$

$$X : [0, t] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ist } (\mathcal{B} \times \mathcal{F}_t)/\mathcal{B}\text{-messbar.}$$

Definition

Sei $(\mathcal{F}_t^X)_{t \in I} \subset \mathcal{F}$ die kleinste Filtration, bezüglich welcher X adaptiert ist. \mathcal{F}^X heisst die von X erzeugte σ -Algebra.

Theorem 2.1

(a) Sei X progressiv messbar. Dann ist X adaptiert.

(b) Sei X adaptiert, und habe X stetige Pfade. Dann ist X progressiv messbar.

Literaturhinweise

(a) Siehe [2], Lemma 23.5, S.156.

(b) Siehe [14], Theorem 2.38, S.32.

Beweis

(a) Die Aussage ist evident.

(b) Wir definieren eine Folge $(\Phi^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $\Phi^{(n)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$\Phi^{(n)}(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^n} 1_{(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}(t).$$

Wir definieren ferner eine Folge $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ von progressiv messbaren stochastischen Prozessen durch:

$$X^{(n)}(t, \omega) := X(\Phi^{(n)}(t), \omega).$$

Nach Voraussetzung hat X stetige Pfade. Daraus folgt:

$$X(t, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} X^{(n)}(t, \omega).$$

Also ist X progressiv messbar.

□

Definition

Sei $\tau : \Omega \rightarrow I \cup \{\infty\}$ mit folgender Eigenschaft:

$\forall t \in I$:

$$\tau^{-1}([0, t]) \in \mathcal{F}_t.$$

τ heisst *Stoppzeit*.

Definition

(a) Wir definieren eine σ -Algebra \mathcal{F}_τ durch:

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} \mid \forall t \in I: A \cap \tau^{-1}([0, t]) \in \mathcal{F}_t\}.$$

(b) $(\mathcal{F}_{\tau \wedge t})_{t \in I}$ heisst die durch τ *gestoppte* Filtration.

Definition

(a) Wir definieren eine Zufallsvariable X_τ durch:

$$X_\tau(\omega) := X_{\tau(\omega)}(\omega).$$

(b) $(X_{\tau \wedge t})_{t \in I}$ heisst der durch τ *gestoppte* stochastische Prozess.

2.2 Martingale

Definition

Sei M ein adaptierter stochastischer Prozess mit folgender Eigenschaft:

$\forall t \in I$:

$$E_P[|M_t|] < \infty.$$

(a) M heißt *Martingal*, falls gilt:

$\forall t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2$:

$$M_{t_1} = E_P[M_{t_2} | \mathcal{F}_{t_1}] \quad (\text{fast sicher}).$$

(b) M heißt *Submartingal*, falls gilt:

$\forall t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2$:

$$M_{t_1} \leq E_P[M_{t_2} | \mathcal{F}_{t_1}] \quad (\text{fast sicher}).$$

(c) M heißt *Supermartingal*, falls gilt:

$\forall t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2$:

$$M_{t_1} \geq E_P[M_{t_2} | \mathcal{F}_{t_1}] \quad (\text{fast sicher}).$$

Theorem 2.2 (Doobsche Maximalungleichung)

Sei M ein Martingal mit stetigen Pfaden (fast sicher), und sei $T \in I$. Dann gilt:

$$E_P \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^2 \right] \leq 4 E_P[|M_T|^2].$$

Literaturhinweis

Siehe [21], Theorem 6.16, S.101.

Theorem 2.3 (Satz von Doob über Optional Sampling)

Sei M ein Martingal mit stetigen Pfaden (fast sicher), sei $T \in I$, und seien τ_1, τ_2 Stoppzeiten mit $\tau_1 \leq \tau_2 \leq T$. Dann gilt:

$$M_{\tau_1} = E_P[M_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}] \quad (\text{fast sicher}).$$

Literaturhinweis

Siehe [21], Theorem 8.10, S.131.

2.3 Brownsche Bewegungen

Voraussetzungen

1. Sei \mathcal{F} vollständig.
2. Sei $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ augmentiert und stetig.

Definition

Sei W ein stochastischer Prozess. W heißt *Brownsche Bewegung*, falls gilt:

1. W ist adaptiert bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$.
2. W hat stetige Pfade (fast sicher).
3. $W_0 = 0$ (fast sicher).
4. $\forall t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2$:
 $W_{t_2} - W_{t_1}$ ist $(0, t_2 - t_1)$ -Normal-verteilt.
5. $\forall t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2$:
 $W_{t_2} - W_{t_1}$ ist unabhängig von \mathcal{F}_{t_1} .

Theorem 2.4

Sei W eine Brownsche Bewegung.

(a) Dann gilt:

W ist ein Martingal.

(b) Sei M definiert durch:

$$M_t := |W_t|^2 - t.$$

Dann gilt:

M ist ein Martingal.

(c) Sei $\sigma \in \mathbb{R}$, und sei M definiert durch:

$$M_t := \exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right).$$

Dann gilt:

M ist ein Martingal.

Literaturhinweise

1. Siehe [15], Proposition 3.3.3, S.32.
2. Siehe [19], Theorem 4.4, S.55.

Beweis

Seien $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2$.

(a) Wir schreiben:

$$E_P[W_{t_2} | \mathcal{F}_{t_1}] = E_P[W_{t_2} - W_{t_1} | \mathcal{F}_{t_1}] + E_P[W_{t_1} | \mathcal{F}_{t_1}].$$

Nach Voraussetzung ist W adaptiert. Daraus folgt:

$$E_P[W_{t_1} | \mathcal{F}_{t_1}] = W_{t_1}.$$

Nach Voraussetzung ist $W_{t_2} - W_{t_1}$ unabhängig von \mathcal{F}_{t_1} . Daraus folgt:

$$E_P[W_{t_2} - W_{t_1} | \mathcal{F}_{t_1}] = E_P[W_{t_2} - W_{t_1}].$$

Nach Voraussetzung ist $W_{t_2} - W_{t_1}$ $(0, t_2 - t_1)$ -Normal-verteilt. Daraus folgt:

$$E_P[W_{t_2} - W_{t_1}] = 0.$$

Daraus folgt insgesamt:

$$E_P[W_{t_2} | \mathcal{F}_{t_1}] = W_{t_1}.$$

(b) Wie in (a) erhalten wir:

$$\begin{aligned} & E_P[|W_{t_2}|^2 - t_2 | \mathcal{F}_{t_1}] \\ &= E_P[|W_{t_1}|^2 - t_1 | \mathcal{F}_{t_1}] + E_P[|W_{t_2} - W_{t_1}|^2 - (t_2 - t_1) | \mathcal{F}_{t_1}] \\ &\quad - 2 E_P[W_{t_1} (W_{t_2} - W_{t_1}) | \mathcal{F}_{t_1}] \\ &= |W_{t_1}|^2 - t_1 + E_P[|W_{t_2} - W_{t_1}|^2] - (t_2 - t_1) - 2 W_{t_1} E_P[(W_{t_2} - W_{t_1}) | \mathcal{F}_{t_1}] \\ &= |W_{t_1}|^2 - t_1 - 2 W_{t_1} E_P[W_{t_2} - W_{t_1}] \\ &= |W_{t_1}|^2 - t_1. \end{aligned}$$

(c) Ebenfalls wie in (a) erhalten wir:

$$E_P \left[\exp \left(\sigma W_{t_2} - \frac{\sigma^2}{2} t_2 \right) \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= E_P \left[\exp \left(\sigma W_{t_1} - \frac{\sigma^2}{2} t_1 \right) \exp \left(\sigma (W_{t_2} - W_{t_1}) - \frac{\sigma^2}{2} (t_2 - t_1) \right) \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] \\
&= \exp \left(\sigma W_{t_1} - \frac{\sigma^2}{2} t_1 \right) E_P \left[\exp \left(\sigma (W_{t_2} - W_{t_1}) - \frac{\sigma^2}{2} (t_2 - t_1) \right) \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] \\
&= \exp \left(\sigma W_{t_1} - \frac{\sigma^2}{2} t_1 \right) E_P \left[\exp \left(\sigma (W_{t_2} - W_{t_1}) - \frac{\sigma^2}{2} (t_2 - t_1) \right) \right].
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $W_{t_2} - W_{t_1}$ $(0, t_2 - t_1)$ -Normal-verteilt. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
&E_P \left[\exp \left(\sigma (W_{t_2} - W_{t_1}) - \frac{\sigma^2}{2} (t_2 - t_1) \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} \int_{\mathbb{R}} \exp \left(\sigma x - \frac{\sigma^2}{2} (t_2 - t_1) \right) \exp \left(-\frac{x^2}{2(t_2 - t_1)} \right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} \int_{\mathbb{R}} \exp \left(-\frac{x^2}{2(t_2 - t_1)} + \sigma x - \frac{\sigma^2}{2} (t_2 - t_1) \right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp \left(-\frac{y^2}{2} \right) dy \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Daraus folgt insgesamt:

$$E_P \left[\exp \left(\sigma W_{t_2} - \frac{\sigma^2}{2} t_2 \right) \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] = \exp \left(\sigma W_{t_1} - \frac{\sigma^2}{2} t_1 \right).$$

□

2.4 Stochastische Integrale

Voraussetzung

- Sei $I = [0, T]$.

Funktionsräume

Sei X ein stochastischer Prozess.

1. X heisst *einfach*, falls gilt:

$\exists t_0, \dots, t_n \in I$ mit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$

\exists Zufallsvariablen Φ_1, \dots, Φ_n mit $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -messbaren beschränkten Φ_i :

$$X_t(\omega) = \sum_{i=1}^n 1_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \Phi_i(\omega).$$

Die Menge aller einfachen stochastischen Prozesse bezeichnen wir mit \mathfrak{G} .

2. Sei $p \in [1, \infty)$. X heisst p -integrierbar, falls gilt:

- i. X ist progressiv messbar.
- ii. X besitzt folgende Eigenschaft:

$$E_P \left[\int_0^T |X_t|^p dt \right] < \infty.$$

Die Menge aller p -integrierbaren stochastischen Prozesse bezeichnen wir mit \mathfrak{L}^p . Wir definieren eine Seminorm auf \mathfrak{L}^p durch:

$$\|X\|_{\mathfrak{L}^p}^p := E_P \left[\int_0^T |X_t|^p dt \right].$$

Durch Bildung der zugehörigen Äquivalenzklassen wird \mathfrak{L}^p zu einem normierten Raum.

3. Sei $p \in [1, \infty)$. X heisst lokal p -integrierbar, falls gilt:

- i. X ist progressiv messbar.
- ii. X besitzt folgende Eigenschaft:

$$\int_0^T |X_t|^p dt < \infty \quad (\text{fast sicher}).$$

Die Menge aller lokal p -integrierbaren stochastischen Prozesse bezeichnen wir mit \mathfrak{L}_{loc}^p .

4. X heisst pfadstetig, falls gilt:

- i. X hat stetige Pfade (fast sicher).
- ii. X besitzt folgende Eigenschaft:

$$E_P \left[\sup_{t \in I} |X_t|^2 \right] < \infty.$$

Die Menge aller pfadstetigen Prozesse bezeichnen wir mit \mathfrak{C} . Wir definieren eine Seminorm auf \mathfrak{C} durch:

$$\|X\|_{\mathfrak{C}}^2 := E_P \left[\sup_{t \in I} |X_t|^2 \right].$$

Durch Bildung der zugehörigen Äquivalenzklassen wird \mathfrak{C} zu einem normierten Raum.

5. X heisst lokal pfadstetig, falls gilt:

- i. X hat stetige Pfade (fast sicher).
- ii. X besitzt folgende Eigenschaft:

$$\sup_{t \in I} |X_t|^2 < \infty \quad (\text{fast sicher}).$$

Die Menge aller lokal pfadstetigen Prozesse bezeichnen wir mit \mathfrak{C}_{loc} .

6. X heisst *pfadstetiges Martingal*, falls gilt:

- i. X ist ein Martingal.
- ii. X hat stetige Pfade (fast sicher).
- iii. X besitzt folgende Eigenschaft:

$$E_P[|X_T|^2] < \infty.$$

Die Menge aller pfadstetigen Martingale bezeichnen wir mit \mathfrak{M} . Wir definieren eine Seminorm auf \mathfrak{M} durch:

$$\|X\|_{\mathfrak{M}}^2 := E_P[|X_T|^2].$$

Nach der Doobschen Maximalungleichung gilt:

$$\|X\|_{\mathfrak{C}} \leq 2 \|X\|_{\mathfrak{M}}.$$

Durch Bildung der zugehörigen Äquivalenzklassen wird \mathfrak{M} zu einem normierten Raum.

Theorem 2.5

- (a) \mathfrak{L}^p ist ein Banachraum.
- (b) \mathfrak{C} ist ein Banachraum.
- (c) \mathfrak{M} ist ein Banachraum.

Beweis

(a) Nach Konstruktion gilt:

1. \mathfrak{L}^p ist ein Unterraum von $L^p(I \times \Omega)$.
2. $\|\cdot\|_{\mathfrak{L}^p}$ und $\|\cdot\|_{L^p(I \times \Omega)}$ sind identische Normen auf \mathfrak{L}^p .
3. $X \in L^p(I \times \Omega)$ ist genau dann ein Element von \mathfrak{L}^p , wenn X progressiv messbar ist.

4. Konvergenz in $L^p(I \times \Omega)$ impliziert punktweise Konvergenz für eine Teilfolge fast überall in $I \times \Omega$. Also ist $\mathfrak{L}^p \subset L^p(I \times \Omega)$ abgeschlossen.

Insgesamt ist \mathfrak{L}^p ein abgeschlossener Unterraum des Banachraumes $L^p(I \times \Omega)$.

(b) Sei $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathfrak{C} .

1. Nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge gilt:

$$E_P \left[\sup_{t \in I} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 \right] \leq \frac{1}{8^{n+1}}.$$

Mit Hilfe der Ungleichung von Chebychev folgt daraus:

$$\begin{aligned} P \left(\left\{ \omega \in \Omega \mid \sup_{t \in I} |X_t^{(n+1)}(\omega) - X_t^{(n)}(\omega)|^2 \geq \frac{1}{4^{n+1}} \right\} \right) \\ \leq 4^{n+1} E_P \left[\sup_{t \in I} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 \right] \\ \leq \frac{1}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

2. Mit Hilfe von Punkt 1 und dem Lemma von Borel–Cantelli erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &= P \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \left\{ \omega \in \Omega \mid \sup_{t \in I} |X_t^{(n+1)}(\omega) - X_t^{(n)}(\omega)|^2 \geq \frac{1}{4^{n+1}} \right\} \right) \\ &= P \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ \omega \in \Omega \mid \exists n \geq k : \sup_{t \in I} |X_t^{(n+1)}(\omega) - X_t^{(n)}(\omega)|^2 \geq \frac{1}{4^{n+1}} \right\} \right) \\ &= P \left(\left\{ \omega \in \Omega \mid \forall k \in \mathbb{N} \exists n \geq k : \sup_{t \in I} |X_t^{(n+1)}(\omega) - X_t^{(n)}(\omega)|^2 \geq \frac{1}{4^{n+1}} \right\} \right) \\ &= P \left(\left\{ \omega \in \Omega \mid \forall k \in \mathbb{N} \exists n \geq k : \sup_{t \in I} |X_t^{(n+1)}(\omega) - X_t^{(n)}(\omega)| \geq \frac{1}{2^{n+1}} \right\} \right). \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$1 = P \left(\left\{ \omega \in \Omega \mid \exists k \in \mathbb{N} \forall n \geq k : \sup_{t \in I} |X_t^{(n+1)}(\omega) - X_t^{(n)}(\omega)| < \frac{1}{2^{n+1}} \right\} \right).$$

Daraus folgt:

$$1 = P \left(\left\{ \omega \in \Omega \mid \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sup_{t \in I} |X_t^{(n+1)}(\omega) - X_t^{(n)}(\omega)| \right) < \infty \right\} \right).$$

Daraus folgt:

$$1 = P \left(\left\{ \omega \in \Omega \mid \text{Die Folge } (X^{(n)}(\omega))_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert in } \mathcal{C}(I). \right\} \right).$$

Also gibt es einen stochastischen Prozess X mit stetigen Pfaden und folgender Eigenschaft:

$$\sup_{t \in I} |X_t^{(n)} - X_t| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{fast sicher}).$$

3. Wir definieren Zufallsvariablen $Z^{(n)}$, Z durch:

$$Z^{(n)}(\omega) := \sup_{t \in I} |X_t^{(n)}(\omega)|; \quad Z(\omega) := \sup_{t \in I} |X_t(\omega)|.$$

Nach Konstruktion ist $(Z^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge im Banachraum $L^2(\Omega)$. Also konvergiert $(Z^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega)$. Nach Punkt 2 gilt:

$$Z^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Z \quad (\text{fast sicher}).$$

Also konvergiert $(Z^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen Z in $L^2(\Omega)$. Insbesondere ist $Z \in L^2(\Omega)$. Also ist $X \in \mathfrak{C}$.

4. Wir definieren Zufallsvariablen $\bar{Z}^{(n)}$ durch:

$$\bar{Z}^{(n)}(\omega) := \sup_{t \in I} |X_t^{(n)}(\omega) - X_t(\omega)|.$$

Nach Konstruktion ist $(X^{(n)} - X)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathfrak{C} . Also ist $(\bar{Z}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\Omega)$. Also konvergiert $(\bar{Z}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega)$. Nach Punkt 2 gilt:

$$\bar{Z}^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{fast sicher}).$$

Also konvergiert $(\bar{Z}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 in $L^2(\Omega)$. Also konvergiert $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen X in \mathfrak{C} .

5. In Punkt 1 waren wir zu einer Teilfolge übergegangen. Nach Punkt 4 konvergiert also eine Teilfolge von $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen X in \mathfrak{C} . Nach Voraussetzung ist $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathfrak{C} . Also konvergiert die gesamte Folge $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen X in \mathfrak{C} .

(c) Nach Konstruktion gilt:

1. \mathfrak{M} ist ein Unterraum von \mathfrak{C} .
2. $\|\cdot\|_{\mathfrak{M}}$ und $\|\cdot\|_{\mathfrak{C}}$ sind äquivalente Normen auf \mathfrak{M} .
3. $X \in \mathfrak{C}$ ist genau dann ein Element von \mathfrak{M} , wenn X ein Martingal ist.
4. Die bedingte Erwartung ist stetig bzgl. Konvergenz in $L^2(\Omega)$. Also ist $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{C}$ abgeschlossen bzgl. $\|\cdot\|_{\mathfrak{C}}$.

Insgesamt ist \mathfrak{M} ein abgeschlossener Unterraum des Banachraumes \mathfrak{C} .

□

Definition

Sei $X \in \mathfrak{S}$ mit folgender Darstellung:

$$X_t(\omega) = \sum_{i=1}^n 1_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \Phi_i(\omega).$$

Wir definieren einen stochastischen Prozess $I[X]$ durch:

$$(I[X])_t(\omega) := \sum_{i=1}^n \Phi_i(\omega) (W_{t_i \wedge t}(\omega) - W_{t_{i-1} \wedge t}(\omega)).$$

$I[X]$ heisst *stochastisches Integral*.

Notation

$$\int_0^t X_s dW_s := (I[X])_t.$$

$$\int_{t_1}^{t_2} X_s dW_s := \int_0^{t_2} X_s dW_s - \int_0^{t_1} X_s dW_s.$$

Theorem 2.6 (Itosche Isometrie)

(a) Sei $X \in \mathfrak{S}$, dann gilt:

$$E_P \left[\left| \int_0^t X_s dW_s \right|^2 \right] = E_P \left[\int_0^t |X_s|^2 ds \right].$$

(b) Das stochastische Integral ist eine stetige lineare Abbildung:

$$I : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{M}.$$

Insbesondere gilt:

$$\|I[X]\|_{\mathfrak{M}} = \|X\|_{\mathcal{L}^2}.$$

Literaturhinweise

1. Siehe [14], Theorem 2.31, S.29.
2. Siehe [15], Proposition 3.4.2, S.36.

Beweis

Habe X folgende Darstellung:

$$X_t(\omega) = \sum_{i=1}^n 1_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \Phi_i(\omega).$$

(a) Sei $t \in I$, und sei o.B.d.A. $t = t_k$. Nach Konstruktion gilt:

$$\begin{aligned} & E_P \left[\left| \int_0^t X_s dW_s \right|^2 \right] \\ &= E_P \left[\left| \sum_{i=1}^k \Phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \right|^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^k E_P [\Phi_i^2 (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k E_P [\Phi_i \Phi_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) (W_{t_j} - W_{t_{j-1}})]. \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist Φ_i messbar bzgl. $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$, und $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k E_P [\Phi_i^2 (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2] &= \sum_{i=1}^k E_P [\Phi_i^2] E_P [(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2] \\ &= \sum_{i=1}^k E_P [\Phi_i^2] (t_i - t_{i-1}) \\ &= E_P \left[\sum_{i=1}^k \Phi_i^2 (t_i - t_{i-1}) \right] \\ &= E_P \left[\int_0^t |X_s|^2 ds \right]. \end{aligned}$$

Sei $i < j$. Nach Konstruktion sind Φ_i, Φ_j sowie $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$ messbar bzgl. $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$, und $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} & E_P [\Phi_i \Phi_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) (W_{t_j} - W_{t_{j-1}})] \\ &= E_P [\Phi_i \Phi_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})] E_P [W_{t_j} - W_{t_{j-1}}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt insgesamt:

$$E_P \left[\left| \int_0^t X_s dW_s \right|^2 \right] = E_P \left[\int_0^t |X_s|^2 ds \right].$$

(b) Nach Konstruktion gilt:

1. $I[X]$ hat stetige Pfade.
2. $\forall t \in I$:

$$E_P[|(I[X])_t|^2] < \infty.$$

Seien $\bar{t}_1, \bar{t}_2 \in I$ mit $\bar{t}_1 < \bar{t}_2$, und sei o.B.d.A. $\bar{t}_1 = t_k$ sowie $\bar{t}_2 = t_l$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & E_P[(I[X])_{\bar{t}_2} | \mathcal{F}_{\bar{t}_1}] \\ &= E_P \left[\sum_{i=1}^l \Phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \middle| \mathcal{F}_{t_k} \right] \\ &= \sum_{i=1}^k E_P[\Phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) | \mathcal{F}_{t_k}] + \sum_{i=k+1}^l E_P[\Phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) | \mathcal{F}_{t_k}] \\ &= \sum_{i=1}^k \Phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \sum_{i=k+1}^l E_P[E_P[\Phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) | \mathcal{F}_{t_{i-1}}] | \mathcal{F}_{t_k}] \\ &= (I[X])_{\bar{t}_1} + \sum_{i=k+1}^l E_P[\Phi_i E_P[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}] | \mathcal{F}_{t_k}] \\ &= (I[X])_{\bar{t}_1}. \end{aligned}$$

Also ist $I[X]$ ein Martingal.

□

Theorem 2.7

\mathfrak{S} liegt dicht in \mathfrak{L}^p .

Literaturhinweis

Siehe [14], Theorem 2.40, S.34.

Beweis

1. Sei $X \in \mathfrak{L}^p$. Wir definieren Abschneidefunktionen $\Phi^{(n)} : \mathbb{R} \rightarrow [-n, n]$ durch:

$$\Phi^{(n)}(x) := \begin{cases} n & \text{falls } x \in [n, \infty); \\ x & \text{falls } x \in (-n, n); \\ -n & \text{falls } x \in (-\infty, -n]. \end{cases}$$

Wir definieren eine Folge $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{L}^p durch:

$$X_t^{(n)}(\omega) := \Phi^{(n)}(X_t(\omega)).$$

Nach Konstruktion gilt:

$$|X_t^{(n)}(\omega)| \leq |X_t(\omega)| \wedge n.$$

$$X^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X \quad (\text{fast überall in } I \times \Omega).$$

Nach dem Satz von Lebesgue über dominierende Konvergenz folgt daraus:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X^{(n)} - X\|_{\mathfrak{L}^p} = 0.$$

Insbesondere gilt:

$$\{X \in \mathfrak{L}^p \mid X \text{ ist beschränkt}\} \text{ liegt dicht in } \mathfrak{L}^p.$$

2. Sei $X \in \mathfrak{L}^p$ mit $|X| \leq C$. Wir definieren eine Folge $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in $L^p(I \times \Omega)$ durch:

$$X_t^{(n)}(\omega) := n \int_{(t-\frac{1}{n}) \vee 0}^t X_s(\omega) \, ds.$$

Nach Konstruktion gilt:

- i. $X^{(n)}$ hat stetige Pfade.
- ii. Nach dem Satz von Fubini ist $X^{(n)}$ adaptiert.
- iii. $|X_t^{(n)}(\omega)| \leq C$.

Nach den Punkten i und ii ist $X^{(n)}$ progressiv messbar. Also ist $X^{(n)} \in \mathfrak{L}^p$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt:

$$X^{(n)}(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X(\omega) \quad (\text{fast überall in } I).$$

Nach Punkt iii und dem Satz von Lebesgue über dominierende Konvergenz folgt daraus:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T |X_t^{(n)}(\omega) - X_t(\omega)|^p \, dt = 0.$$

Wiederum nach Punkt iii und dem Satz von Lebesgue über dominierende Konvergenz folgt daraus:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_P \left[\int_0^T |X_t^{(n)} - X_t|^p \, dt \right] = 0.$$

Insbesondere gilt:

$\{X \in \mathfrak{L}^p \mid X \text{ ist beschränkt und hat stetige Pfade}\}$ liegt dicht in $\{X \in \mathfrak{L}^p \mid X \text{ ist beschränkt}\}$.

3. Sei $X \in \mathfrak{L}^p$ mit $|X| \leq C$, und habe X stetige Pfade. Wir definieren eine Folge $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{S} durch:

$$X_t^{(n)}(\omega) := 1_{\{0\}}(t) X_0(\omega) + \sum_{i=1}^{2^n} 1_{(t_{i-1}, t_i]}(t) X_{t_{i-1}}(\omega).$$

$$t_i := \frac{iT}{2^n}.$$

Nach Konstruktion gilt:

$$|X_t^{(n)}(\omega)| \leq C.$$

$$X_t^{(n)}(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X_t(\omega).$$

Nach dem Satz von Lebesgue über dominierende Konvergenz folgt daraus:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X^{(n)} - X\|_{\mathfrak{L}^p} = 0.$$

Insbesondere gilt:

\mathfrak{S} liegt dicht in $\{X \in \mathfrak{L}^p \mid X \text{ ist beschränkt und hat stetige Pfade}\}$.

□

Definition

Wir setzen I zu einer linearen Isometrie fort:

$$I : \mathfrak{L}^2 \longrightarrow \mathfrak{M}.$$

Konstruktion

Nach Theorem 2.7 ist \mathfrak{S} ein dichter Teilraum von \mathfrak{L}^2 . Nach Theorem 2.6 ist I eine lineare Isometrie:

$$I : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{M}.$$

Also existiert die obige Fortsetzung und ist eindeutig bestimmt.

Theorem 2.8

Seien $X, Y \in \mathfrak{L}^2$, und sei τ eine Stoppzeit mit folgender Eigenschaft:

$$1_{\{t \leq \tau\}} X_t = 1_{\{t \leq \tau\}} Y_t \quad (\text{fast überall in } I \times \Omega).$$

Dann gilt:

$$1_{\{t \leq \tau\}} \int_0^t X_s dW_s = 1_{\{t \leq \tau\}} \int_0^t Y_s dW_s \quad (\text{fast sicher}).$$

Literaturhinweis

Siehe [19], Theorem 6.4, S.89.

Beweis

1. Wir definieren $Z \in \mathcal{L}^2$ durch:

$$Z_t(\omega) := X_t(\omega) - Y_t(\omega).$$

Nach Konstruktion gilt:

$$1_{\{t \leq \tau\}} Z_t = 0 \quad (\text{fast überall in } I \times \Omega).$$

Es genügt, folgende Aussage zu beweisen:

$$1_{\{t \leq \tau\}} \int_0^t Z_s dW_s = 0 \quad (\text{fast sicher}).$$

2. Sei $A \in \mathcal{L}^2$ mit folgender Eigenschaft:

$$1_{\{t \leq \tau\}} A_t = 0 \quad (\text{fast überall in } I \times \Omega).$$

Wir definieren Abschneidefunktionen $\Phi^{(n)} : \mathbb{R} \rightarrow [-n, n]$ durch:

$$\Phi^{(n)}(x) := \begin{cases} n & \text{falls } x \in [n, \infty); \\ x & \text{falls } x \in (-n, n); \\ -n & \text{falls } x \in (-\infty, -n]. \end{cases}$$

Wir definieren eine Folge $(A^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{L}^2 durch:

$$A_t^{(n)}(\omega) := \Phi^{(n)}(A_t(\omega)).$$

Nach Konstruktion gilt:

$$|A_t^{(n)}(\omega)| \leq |A_t(\omega)| \wedge n.$$

$$1_{\{t \leq \tau\}} A_t^{(n)} = 0 \quad (\text{fast überall in } I \times \Omega).$$

Nach Punkt 1 des Beweises von Theorem 2.7 gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^{(n)} - A\|_{\mathcal{L}^2} = 0.$$

3. Sei $A \in \mathfrak{L}^2$ mit folgenden Eigenschaften:

$$|A_t(\omega)| \leq C.$$

$$1_{\{t \leq \tau\}} A_t = 0 \quad (\text{fast überall in } I \times \Omega).$$

3.1 Nach dem Beweis von Theorem 2.7 gibt es eine Folge $(A^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{S} mit folgenden Eigenschaften:

$$|A_t^{(n)}(\omega)| \leq C.$$

$$A_t^{(n)}(\omega) = \sum_{i=1}^{2^n} 1_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \Phi_i^{(n)}(\omega) \quad \left(t_i := \frac{iT}{2^n}\right).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^{(n)} - A\|_{\mathfrak{L}^2} = 0.$$

Insbesondere gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|1_{\{t > \tau\}} (A^{(n)} - A)\|_{\mathfrak{L}^2} = 0.$$

3.2 Wir definieren eine weitere Folge $(\tilde{A}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{S} durch:

$$\tilde{A}_t^{(n)}(\omega) = \sum_{i=1}^{2^n} 1_{(t_{i-1}, t_i]}(t) 1_{\{t_{i-1} > \tau(\omega)\}} \Phi_i^{(n)}(\omega).$$

Nach Konstruktion gilt:

$$|\tilde{A}_t^{(n)}(\omega)| \leq C.$$

$$1_{\{t \leq \tau\}} \tilde{A}_t^{(n)} = 0 \quad (\text{fast überall in } I \times \Omega).$$

3.3 Sei $t \in I$, und sei o.B.d.A. $t = t_k$. Nach Konstruktion gilt:

$$1_{\{t \leq \tau\}} \int_0^t \tilde{A}_s^{(n)} dW_s = \sum_{i=1}^k 1_{\{t_k \leq \tau\}} 1_{\{t_{i-1} > \tau\}} \Phi_i^{(n)} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = 0.$$

3.4 Nach Konstruktion gilt:

$$\|1_{\{t \leq \tau\}} (\tilde{A}^{(n)} - A)\|_{\mathfrak{L}^2} = 0.$$

Nach Konstruktion gilt ferner:

$$\begin{aligned}
& \left| 1_{\{t > \tau(\omega)\}} (\tilde{A}_t^{(n)}(\omega) - A_t^{(n)}(\omega)) \right| \\
& \leq C \sum_{i=1}^{2^n} 1_{(t_{i-1}, t_i]}(t) 1_{\{t > \tau(\omega)\}} |1_{\{t_{i-1} > \tau(\omega)\}} - 1| \\
& \leq C \sum_{i=1}^{2^n} 1_{(t_{i-1}, t_i]}(t) 1_{\{t_{i-1} \leq \tau(\omega) < t_i\}}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\left\| 1_{\{t > \tau\}} (\tilde{A}^{(n)} - A^{(n)}) \right\|_{\mathcal{L}^2}^2 \leq \frac{C^2 T}{2^n}.$$

Daraus folgt insgesamt:

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \tilde{A}^{(n)} - A \right\|_{\mathcal{L}^2} \\
& \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| 1_{\{t \leq \tau\}} (\tilde{A}^{(n)} - A) \right\|_{\mathcal{L}^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| 1_{\{t > \tau\}} (\tilde{A}^{(n)} - A) \right\|_{\mathcal{L}^2} \\
& \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| 1_{\{t \leq \tau\}} (\tilde{A}^{(n)} - A) \right\|_{\mathcal{L}^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| 1_{\{t > \tau\}} (\tilde{A}^{(n)} - A^{(n)}) \right\|_{\mathcal{L}^2} \\
& \quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| 1_{\{t > \tau\}} (A^{(n)} - A) \right\|_{\mathcal{L}^2} \\
& = 0.
\end{aligned}$$

4. Nach den Punkten 2 und 3 gibt es eine Folge $(Z^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{S} mit folgenden Eigenschaften:

$$1_{\{t \leq \tau\}} Z_t^{(n)} = 0 \quad (\text{fast überall in } I \times \Omega).$$

$$1_{\{t \leq \tau\}} \int_0^t Z_s^{(n)} dW_s = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| Z^{(n)} - Z \right\|_{\mathcal{L}^2} = 0.$$

Daraus folgt:

$$0 = \int_0^t Z_s^{(n)} dW_s \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^t Z_s dW_s \quad (\text{fast sicher}).$$

Damit ist das Theorem bewiesen.

□

Theorem 2.9

Sei $X \in \mathcal{L}^2$, sei $T \in I$, und sei τ eine Stoppzeit mit $\tau \leq T$. Dann gilt:

$$\int_0^\tau X_t dW_t = \int_0^T 1_{\{t \leq \tau\}} X_t dW_t \quad (\text{fast sicher}).$$

Literaturhinweis

Siehe [15], Proposition 3.4.5, S.38.

Beweis

1. Sei $\bar{t} \in I$, und sei $A \in \mathcal{F}_{\bar{t}}$. Nach Theorem 2.7 gibt es eine Folge $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{S} mit folgender Eigenschaft:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X^{(n)} - X\|_{\mathcal{L}^2} = 0.$$

Daraus folgt:

$$1_A \int_{\bar{t}}^T X_t^{(n)} dW_t \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1_A \int_{\bar{t}}^T X_t dW_t \quad (\text{fast sicher}).$$

Nach Konstruktion gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|1_A 1_{\{t > \bar{t}\}} (X^{(n)} - X)\|_{\mathcal{L}^2} = 0.$$

Daraus folgt:

$$\int_0^T 1_A 1_{\{t > \bar{t}\}} X_t^{(n)} dW_t \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^T 1_A 1_{\{t > \bar{t}\}} X_t dW_t \quad (\text{fast sicher}).$$

Habe $X^{(n)}$ folgende Darstellung:

$$X_t^{(n)}(\omega) = \sum_{i=1}^n 1_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \Phi_i^{(n)}(\omega).$$

Sei o.B.d.A. $\bar{t} = t_k$. Nach Konstruktion gilt:

$$\int_0^T 1_A 1_{\{t > \bar{t}\}} X_t^{(n)} dW_t = \sum_{i=k+1}^n 1_A \Phi_i^{(n)}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = 1_A \int_{\bar{t}}^T X_t^{(n)} dW_t.$$

Daraus folgt insgesamt:

$$\int_0^T 1_A 1_{\{t > \bar{t}\}} X_t dW_t = 1_A \int_{\bar{t}}^T X_t dW_t \quad (\text{fast sicher}).$$

2. Wir definieren eine Folge $(\tau^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ von Stoppzeiten durch:

$$\tau^{(n)}(\omega) := \sum_{i=1}^{n+1} t_i^{(n)} 1_{A_i^{(n)}}(\omega).$$

$$t_i^{(n)} := \frac{iT}{n}.$$

$$A_i^{(n)} := \left\{ \omega \in \Omega \mid t_{i-1}^{(n)} \leq \tau(\omega) < t_i^{(n)} \right\}.$$

Mit Hilfe von Punkt 1 erhalten wir:

$$\int_0^T 1_{\{t > \tau^{(n)}\}} X_t dW_t = \sum_{i=1}^{n+1} \int_0^T 1_{A_i} 1_{\{t > t_i^{(n)}\}} X_t dW_t = \sum_{i=1}^{n+1} 1_{A_i} \int_{t_i^{(n)}}^T X_t dW_t$$

(fast sicher).

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \int_0^T 1_{\{t \leq \tau^{(n)}\}} X_t dW_t &= \int_0^T X_t dW_t - \int_0^T 1_{\{t > \tau^{(n)}\}} X_t dW_t \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} 1_{A_i} \int_0^{t_i^{(n)}} X_t dW_t \\ &= \int_0^{\tau^{(n)}} X_t dW_t \quad (\text{fast sicher}). \end{aligned}$$

3. Nach Konstruktion gilt:

$$\tau^{(n)}(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tau(\omega).$$

Nach Konstruktion hat $I[X]$ stetige Pfade (fast sicher). Daraus folgt:

$$\int_0^{\tau^{(n)}} X_t dW_t \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} X_t dW_t \quad (\text{fast sicher}).$$

Nach dem Satz von Lebesgue über dominierende Konvergenz gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| (1_{\{t \leq \tau^{(n)}\}} - 1_{\{t \leq \tau\}}) X \right\|_{\mathcal{L}^2} = 0.$$

Daraus folgt:

$$\int_0^T 1_{\{t \leq \tau^{(n)}\}} X_t dW_t \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^T 1_{\{t \leq \tau\}} X_t dW_t \quad (\text{fast sicher}).$$

4. Aus Punkt 2 und Punkt 3 folgt insgesamt:

$$\int_0^\tau X_t dW_t = \int_0^T 1_{\{t \leq \tau\}} X_t dW_t \quad (\text{fast sicher}).$$

Damit ist das Theorem bewiesen.

□

Definition

Wir setzen I zu einer linearen Abbildung fort:

$$I : \mathfrak{L}_{loc}^2 \longrightarrow \mathfrak{C}_{loc}.$$

Konstruktion

Sei $X \in \mathfrak{L}_{loc}^2$. Wir definieren eine Folge $(\tau^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ von Stoppzeiten durch:

$$\tau^{(n)}(\omega) := T \wedge \inf \left\{ t \in [0, T] \mid \int_0^t |X_s(\omega)|^2 ds \geq n \right\}.$$

Wir definieren eine Folge $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{L}^2 durch:

$$X_t^{(n)}(\omega) := 1_{\{t \leq \tau^{(n)}(\omega)\}} X_t(\omega).$$

Wir definieren $I[X] \in \mathfrak{C}_{loc}$ durch:

$$(I[X])_t(\omega) := (I[X^{(n)}])_t(\omega) \quad \text{falls} \quad t \leq \tau^{(n)}(\omega).$$

Nach Konstruktion gilt:

$$\tau^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T \quad (\text{fast sicher}).$$

Nach Theorem 2.8 gilt ferner:

$$1_{\{t \leq \tau^{(n)}\}} (I[X^{(n+1)}])_t(\omega) = 1_{\{t \leq \tau^{(n)}\}} (I[X^{(n)}])_t(\omega) \quad (\text{fast sicher}).$$

Also ist die obige Fortsetzung wohldefiniert.

Theorem 2.10

Sei $X \in \mathfrak{L}_{loc}^2$, sei $(\tau^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ die oben definierte Folge von Stoppzeiten, und sei $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ die oben definierte Folge in \mathfrak{L}^2 . Dann gilt:

$$\int_0^{\tau^{(n)} \wedge t} X_s dW_s = \int_0^t X_s^{(n)} dW_s \quad (\text{fast sicher}).$$

Insbesondere ist $I[X]$ ein lokales Martingal.

Beweis

Nach Konstruktion gilt:

$$\int_0^t X_s dW_s = 1_{\{\tau^{(n)}(\omega) \geq t\}} \int_0^t X_s^{(n)} dW_s + \sum_{k=n+1}^{\infty} 1_{\{\tau^{(k)} \geq t > \tau^{(k-1)}\}} \int_0^t X_s^{(k)} dW_s.$$

Daraus folgt:

$$\int_0^{\tau^{(n)} \wedge t} X_s dW_s = 1_{\{\tau^{(n)}(\omega) \geq t\}} \int_0^t X_s^{(n)} dW_s + \sum_{k=n+1}^{\infty} 1_{\{\tau^{(k)} \geq t > \tau^{(k-1)}\}} \int_0^{\tau^{(n)}} X_s^{(k)} dW_s.$$

Nach Theorem 2.9 gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau^{(n)}} X_s^{(k)} dW_s &= \int_0^T 1_{\{\tau^{(n)} \geq s\}} X_s^{(k)} dW_s \\ &= \int_0^T 1_{\{\tau^{(n)} \geq s\}} X_s^{(n)} dW_s \\ &= \int_0^{\tau^{(n)}} X_s^{(n)} dW_s. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau^{(n)} \wedge t} X_s dW_s &= 1_{\{\tau^{(n)} \geq t\}} \int_0^t X_s^{(n)} dW_s + 1_{\{t > \tau^{(n)}\}} \int_0^{\tau^{(n)}} X_s^{(n)} dW_s \\ &= \int_0^{\tau^{(n)} \wedge t} X_s^{(n)} dW_s. \end{aligned}$$

Nach Theorem 2.9 gilt ferner:

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau^{(n)} \wedge t} X_s^{(n)} dW_s &= \int_0^t 1_{\{\tau^{(n)} \wedge t \geq s\}} X_s^{(n)} dW_s \\ &= \int_0^t 1_{\{t \geq s\}} 1_{\{\tau^{(n)} \geq s\}} X_s^{(n)} dW_s \\ &= \int_0^t X_s^{(n)} dW_s. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\int_0^{\tau^{(n)} \wedge t} X_s dW_s = \int_0^t X_s^{(n)} dW_s.$$

□

2.5 Itoscher Kalkül

Voraussetzung

- Seien $W^{(1)}, \dots, W^{(p)}$ unabhängige Brownsche Bewegungen.

Funktionsraum

Sei $X \in \mathfrak{C}_{loc}$. X heisst *Itoscher Prozess*, falls gilt:

$\exists \mathcal{F}_0$ -messbare Zufallsvariable $Z \exists A \in \mathfrak{L}_{loc}^1 \exists B^{(1)}, \dots, B^{(p)} \in \mathfrak{L}_{loc}^2$:

$$X_t = Z + \int_0^t A_s ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t B_s^{(i)} dW_s^{(i)} \quad (\text{fast sicher}).$$

Die Menge aller Itoschen Prozesse bezeichnen wir mit \mathfrak{I} .

Theorem 2.11 (Ortogonalitätsrelationen)

Sei $i \neq j$, und seien $B^{(i)}, B^{(j)} \in \mathfrak{L}^2$. Dann gilt:

$$E_P \left[\left(\int_0^t B_s^{(i)} dW_s^{(i)} \right) \left(\int_0^t B_s^{(j)} dW_s^{(j)} \right) \right] = 0.$$

Beweis

1. Nach Theorem 2.7 gibt es Folgen $(B^{(n,i)})_{n \in \mathbb{N}}, (B^{(n,j)})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{S} Mit folgender Eigenschaft:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B^{(n,k)} - B^{(k)}\|_{\mathfrak{L}^2} = 0.$$

Mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung sowie der Itoschen Isometrie erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \left| E_P \left[\left(\int_0^t B_s^{(n,i)} dW_s^{(i)} \right) \left(\int_0^t B_s^{(n,j)} dW_s^{(j)} \right) \right] \right. \\ & \quad \left. - E_P \left[\left(\int_0^t B_s^{(i)} dW_s^{(i)} \right) \left(\int_0^t B_s^{(j)} dW_s^{(j)} \right) \right] \right| \\ & \leq \left| E_P \left[\left(\int_0^t (B_s^{(n,i)} - B_s^{(i)}) dW_s^{(i)} \right) \left(\int_0^t B_s^{(n,j)} dW_s^{(j)} \right) \right] \right| \\ & \quad + \left| E_P \left[\left(\int_0^t B_s^{(i)} dW_s^{(i)} \right) \left(\int_0^t (B_s^{(n,j)} - B_s^{(j)}) dW_s^{(j)} \right) \right] \right| \\ & \leq \left(E_P \left[\left(\int_0^t (B_s^{(n,i)} - B_s^{(i)}) dW_s^{(i)} \right)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \left(E_P \left[\left(\int_0^t B_s^{(n,j)} dW_s^{(j)} \right)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad + \left(E_P \left[\left(\int_0^t B_s^{(i)} dW_s^{(i)} \right)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \left(E_P \left[\left(\int_0^t (B_s^{(n,j)} - B_s^{(j)}) dW_s^{(j)} \right)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(E_P \left[\left(\int_0^t B_s^{(i)} dW_s^{(i)} \right)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \left(E_P \left[\left(\int_0^t (B_s^{(n,j)} - B_s^{(j)}) dW_s^{(j)} \right)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\
& = \left(E_P \left[\int_0^t |B_s^{(n,i)} - B_s^{(i)}|^2 ds \right] \right)^{\frac{1}{2}} \left(E_P \left[\int_0^t |B_s^{(n,j)}|^2 ds \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad + \left(E_P \left[\int_0^t |B_s^{(i)}|^2 ds \right] \right)^{\frac{1}{2}} \left(E_P \left[\int_0^t |B_s^{(n,j)} - B_s^{(j)}|^2 ds \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \|B^{(n,i)} - B^{(i)}\|_{\mathfrak{L}^2} \|B^{(n,j)}\|_{\mathfrak{L}^2} + \|B^{(i)}\|_{\mathfrak{L}^2} \|B^{(n,j)} - B^{(j)}\|_{\mathfrak{L}^2} \\
& \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

2. Habe $B^{(n,k)}$ folgende Darstellung:

$$B_t^{(n,k)}(\omega) = \sum_{l=1}^n 1_{(t_{l-1}, t_l]}(t) \Phi_l^{(n,k)}(\omega).$$

Sei o.B.d.A. $t = t_\lambda$. Nach Konstruktion gilt:

$$\int_0^t B_s^{(n,k)} dW_s^{(k)} = \sum_{l=1}^\lambda \Phi_l^{(n,k)} (W_{t_l}^{(k)} - W_{t_{l-1}}^{(k)}).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
& E_P \left[\left(\int_0^t B_s^{(n,i)} dW_s^{(i)} \right) \left(\int_0^t B_s^{(n,j)} dW_s^{(j)} \right) \right] \\
& = \sum_{l=1}^\lambda \sum_{m=1}^\lambda E_P [\Phi_l^{(n,i)} \Phi_m^{(n,j)} (W_{t_l}^{(i)} - W_{t_{l-1}}^{(i)}) (W_{t_m}^{(j)} - W_{t_{m-1}}^{(j)})]
\end{aligned}$$

Für $l < m$ gilt:

$$\begin{aligned}
& E_P [\Phi_l^{(n,i)} \Phi_m^{(n,j)} (W_{t_l}^{(i)} - W_{t_{l-1}}^{(i)}) (W_{t_m}^{(j)} - W_{t_{m-1}}^{(j)})] \\
& = E_P [E_P [\Phi_l^{(n,i)} \Phi_m^{(n,j)} (W_{t_l}^{(i)} - W_{t_{l-1}}^{(i)}) (W_{t_m}^{(j)} - W_{t_{m-1}}^{(j)}) | \mathcal{F}_{t_{m-1}}]] \\
& = E_P [\Phi_l^{(n,i)} \Phi_m^{(n,j)} (W_{t_l}^{(i)} - W_{t_{l-1}}^{(i)}) E_P [(W_{t_m}^{(j)} - W_{t_{m-1}}^{(j)}) | \mathcal{F}_{t_{m-1}}]] \\
& = E_P [\Phi_l^{(n,i)} \Phi_m^{(n,j)} (W_{t_l}^{(i)} - W_{t_{l-1}}^{(i)}) E_P [(W_{t_m}^{(j)} - W_{t_{m-1}}^{(j)})]] \\
& = 0.
\end{aligned}$$

Für $l > m$ gilt analog:

$$E_P [\Phi_l^{(n,i)} \Phi_m^{(n,j)} (W_{t_l}^{(i)} - W_{t_{l-1}}^{(i)}) (W_{t_m}^{(j)} - W_{t_{m-1}}^{(j)})] = 0.$$

Nach Voraussetzung sind $W^{(i)}$ und $W^{(j)}$ unabhängig. Daraus folgt für $l = m$:

$$\begin{aligned}
& E_P[\Phi_l^{(n,i)} \Phi_l^{(n,j)} (W_{t_l}^{(i)} - W_{t_{l-1}}^{(i)}) (W_{t_l}^{(j)} - W_{t_{l-1}}^{(j)})] \\
&= E_P[E_P[\Phi_l^{(n,i)} \Phi_l^{(n,j)} (W_{t_l}^{(i)} - W_{t_{l-1}}^{(i)}) (W_{t_l}^{(j)} - W_{t_{l-1}}^{(j)}) | \mathcal{F}_{t_{l-1}}]] \\
&= E_P[\Phi_l^{(n,i)} \Phi_l^{(n,j)} E_P[(W_{t_l}^{(i)} - W_{t_{l-1}}^{(i)}) (W_{t_l}^{(j)} - W_{t_{l-1}}^{(j)}) | \mathcal{F}_{t_{l-1}}]] \\
&= E_P[\Phi_l^{(n,i)} \Phi_l^{(n,j)} E_P[(W_{t_l}^{(i)} - W_{t_{l-1}}^{(i)}) | \mathcal{F}_{t_{l-1}}] E_P[(W_{t_l}^{(j)} - W_{t_{l-1}}^{(j)}) | \mathcal{F}_{t_{l-1}}]] \\
&= E_P[\Phi_l^{(n,i)} \Phi_l^{(n,j)} E_P[(W_{t_l}^{(i)} - W_{t_{l-1}}^{(i)})] E_P[(W_{t_l}^{(j)} - W_{t_{l-1}}^{(j)})]] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt insgesamt:

$$E_P\left[\left(\int_0^t B_s^{(n,i)} dW_s^{(i)}\right) \left(\int_0^t B_s^{(n,j)} dW_s^{(j)}\right)\right] = 0.$$

3. Nach Punkt 1 und Punkt 2 gilt:

$$\begin{aligned}
& E_P\left[\left(\int_0^t B_s^{(i)} dW_s^{(i)}\right) \left(\int_0^t B_s^{(j)} dW_s^{(j)}\right)\right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} E_P\left[\left(\int_0^t B_s^{(n,i)} dW_s^{(i)}\right) \left(\int_0^t B_s^{(n,j)} dW_s^{(j)}\right)\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Theorem 2.12 (Eindeutigkeit der Itoschen Zerlegung)

Sei $X \in \mathfrak{I}$ mit folgenden Zerlegungen ($k = 1, 2$):

$$X_t = Z^{(k)} + \int_0^t A_s^{(k)} ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \quad (\text{fast sicher}).$$

Dann gilt:

$$Z^{(1)} = Z^{(2)} \quad (\text{fast sicher}).$$

$$A^{(1)} = A^{(2)} \quad (\text{fast überall in } I \times \Omega).$$

$$B^{(1,i)} = B^{(2,i)} \quad (\text{fast überall in } I \times \Omega).$$

Literaturhinweis

Siehe [14], Exercise (5), S.77.

Beweis

Sei $X = 0 \in \mathfrak{J}$ mit folgender Zerlegung:

$$X_t = Z + \int_0^t A_s \, ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t B_s^{(i)} \, dW_s^{(i)} = 0 \quad (\text{fast sicher}).$$

Es genügt, folgende Aussagen zu beweisen:

$$Z = 0 \quad (\text{fast sicher}).$$

$$A = 0 \quad (\text{fast überall in } I \times \Omega).$$

$$B^{(i)} = 0 \quad (\text{fast überall in } I \times \Omega).$$

1. Nach Konstruktion gilt:

$$Z = X_0 = 0 \quad (\text{fast sicher}).$$

2. Wir definieren Folgen $(\sigma^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, $(\tau^{(n,1)})_{n \in \mathbb{N}}$, \dots , $(\tau^{(n,p)})_{n \in \mathbb{N}}$ sowie $(\tau^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ von Stoppzeiten durch:

$$\sigma^{(n)}(\omega) := T \wedge \inf \left\{ t \in [0, T] \mid \int_0^t |A_s(\omega)| \, ds \geq n \right\}.$$

$$\tau^{(n,i)}(\omega) := T \wedge \inf \left\{ t \in [0, T] \mid \int_0^t |B_s^{(i)}(\omega)|^2 \, ds \geq n \right\}.$$

$$\tau^{(n)}(\omega) := \sigma^{(n)}(\omega) \wedge \tau^{(n,1)}(\omega) \wedge \dots \wedge \tau^{(n,p)}(\omega).$$

Nach Konstruktion gilt:

$$\tau^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T \quad (\text{fast sicher}).$$

3. Wir definieren $M \in \mathfrak{C}_{loc}$ durch:

$$M_t := \sum_{i=1}^p \int_0^t B_s^{(i)} \, dW_s^{(i)}.$$

Nach Konstruktion gilt:

$$M_t = - \int_0^t A_s \, ds.$$

Wir definieren eine Folge $(M^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ von stochastischen Prozessen durch:

$$M_t^{(n)} := M_{\tau^{(n)} \wedge t}.$$

Nach Konstruktion gilt:

$$M_t^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M_t \quad (\text{fast sicher}).$$

Wir definieren Folgen $(A^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{L}^1 sowie $(B^{(n,1)})_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (B^{(n,p)})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{L}^2 durch:

$$A_t^{(n)} := 1_{\{t \leq \tau^{(n)}\}} A_t.$$

$$B_t^{(n,i)} := 1_{\{t \leq \tau^{(n)}\}} B_t^{(i)}.$$

Nach Konstruktion gilt:

$$A^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \quad (\text{fast überall in } I \times \Omega).$$

$$B^{(n,i)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B^{(i)} \quad (\text{fast überall in } I \times \Omega).$$

4. Nach Theorem 2.9 und Theorem 2.10 gilt:

$$\begin{aligned} M_t^{(n)} &= \sum_{i=1}^p \int_0^{\tau^{(n)} \wedge t} B_s^{(i)} \, dW_s^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^p \int_0^{\sigma^{(n)} \wedge \tau^{(n,1)} \wedge \dots \wedge \tau^{(n,p)} \wedge t} B_s^{(i)} \, dW_s^{(i)} \\ &= \int_0^{\sigma^{(n)} \wedge \tau^{(n,2)} \wedge \dots \wedge \tau^{(n,p)} \wedge t} 1_{\{t \leq \tau^{(n,1)}\}} B_s^{(1)} \, dW_s^{(1)} + \dots \\ &\quad \dots + \int_0^{\sigma^{(n)} \wedge \tau^{(n,1)} \wedge \dots \wedge \tau^{(n,p-1)} \wedge t} 1_{\{t \leq \tau^{(n,p)}\}} B_s^{(p)} \, dW_s^{(p)} \\ &= \sum_{i=1}^p \int_0^t 1_{\{t \leq \tau^{(n)}\}} B_s^{(i)} \, dW_s^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^p \int_0^t B_s^{(n,i)} \, dW_s^{(i)}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $M^{(n)} \in \mathfrak{M}$. Nach Konstruktion gilt ferner:

$$M_t^{(n)} = - \int_0^{\tau^{(n)} \wedge t} A_s \, ds = - \int_0^t 1_{\{t \leq \tau^{(n)}\}} A_s \, ds = - \int_0^t A_s^{(n)} \, ds.$$

5. Wir definieren $t_0^{(k)}, \dots, t_k^{(k)} \in I$ durch:

$$t_j^{(k)} := \frac{jT}{k}.$$

5.1 Nach Konstruktion gilt einerseits:

$$\begin{aligned} & E_P \left[\sum_{j=1}^k \left| M_{t_j^{(k)}}^{(n)} - M_{t_{j-1}^{(k)}}^{(n)} \right|^2 \right] \\ &= \sum_{j=1}^k \left(E_P \left[\left| M_{t_j^{(k)}}^{(n)} \right|^2 \right] + E_P \left[\left| M_{t_{j-1}^{(k)}}^{(n)} \right|^2 \right] - 2 E_P \left[M_{t_j^{(k)}}^{(n)} M_{t_{j-1}^{(k)}}^{(n)} \right] \right). \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist $M^{(n)}$ ein Martingal. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} E_P \left[M_{t_j^{(k)}}^{(n)} M_{t_{j-1}^{(k)}}^{(n)} \right] &= E_P \left[E_P \left[M_{t_j^{(k)}}^{(n)} M_{t_{j-1}^{(k)}}^{(n)} \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}^{(k)}} \right] \right] \\ &= E_P \left[M_{t_{j-1}^{(k)}}^{(n)} E_P \left[M_{t_j^{(k)}}^{(n)} \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}^{(k)}} \right] \right] \\ &= E_P \left[\left| M_{t_{j-1}^{(k)}}^{(n)} \right|^2 \right]. \end{aligned}$$

Daraus folgt insgesamt:

$$\begin{aligned} E_P \left[\sum_{j=1}^k \left| M_{t_j^{(k)}}^{(n)} - M_{t_{j-1}^{(k)}}^{(n)} \right|^2 \right] &= \sum_{j=1}^k \left(E_P \left[\left| M_{t_j^{(k)}}^{(n)} \right|^2 \right] - E_P \left[\left| M_{t_{j-1}^{(k)}}^{(n)} \right|^2 \right] \right) \\ &= E_P \left[\left| M_T^{(n)} \right|^2 \right] - E_P \left[\left| M_0^{(n)} \right|^2 \right] \\ &= E_P \left[\left| M_T^{(n)} \right|^2 \right] \\ &= \|M^{(n)}\|_{\mathfrak{M}}^2. \end{aligned}$$

5.2 Nach Konstruktion gilt andererseits:

$$\begin{aligned} E_P \left[\sum_{j=1}^k \left| M_{t_j^{(k)}}^{(n)} - M_{t_{j-1}^{(k)}}^{(n)} \right|^2 \right] &= E_P \left[\sum_{j=1}^k \left| \int_{t_{j-1}^{(k)}}^{t_j^{(k)}} A_s^{(n)} ds \right|^2 \right] \\ &\leq E_P \left[\left(\max_{j=1, \dots, k} \int_{t_{j-1}^{(k)}}^{t_j^{(k)}} |A_s^{(n)}| ds \right) \left(\int_0^T |A_s^{(n)}| ds \right) \right] \\ &\leq n E_P \left[\max_{j=1, \dots, k} \int_{t_{j-1}^{(k)}}^{t_j^{(k)}} |A_s^{(n)}| ds \right]. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Lebesgue über dominierende Konvergenz gilt:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} E_P \left[\max_{j=1, \dots, k} \int_{t_{j-1}^{(k)}}^{t_j^{(k)}} |A_s^{(n)}| ds \right] = 0.$$

Daraus folgt insgesamt:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} E_P \left[\sum_{j=1}^k \left| M_{t_j^{(k)}}^{(n)} - M_{t_{j-1}^{(k)}}^{(n)} \right|^2 \right] = 0.$$

Nach den Punkten 5.1 und 5.2 gilt:

$$\|M^{(n)}\|_{\mathfrak{M}}^2 = \limsup_{k \rightarrow \infty} E_P \left[\sum_{j=1}^k \left| M_{t_j^{(k)}}^{(n)} - M_{t_{j-1}^{(k)}}^{(n)} \right|^2 \right] = 0.$$

6. Nach Punkt 4 und Punkt 5 gilt für fast alle $\omega \in \Omega$:

$$0 = M_t^{(n)}(\omega) = - \int_0^t A_s^{(n)}(\omega) ds.$$

Nach Konstruktion ist $A(\omega) \in L^1(I)$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt daraus:

$$A^{(n)}(\omega) = 0 \quad (\text{fast überall in } I).$$

Daraus folgt:

$$\int_0^T |A_t^{(n)}(\omega)| dt = 0.$$

Daraus folgt:

$$E_P \left[\int_0^T |A_t^{(n)}| dt \right] = 0.$$

Daraus folgt:

$$A^{(n)} = 0 \quad (\text{fast überall in } I \times \Omega).$$

Nach Punkt 3 folgt daraus:

$$A = 0 \quad (\text{fast überall in } I \times \Omega).$$

7. Nach Punkt 4 und Punkt 5 gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= \|M^{(n)}\|_{\mathfrak{M}}^2 \\
&= E_P \left[\left| \sum_{i=1}^p \int_0^T B_t^{(n,i)} dW_t^{(i)} \right|^2 \right] \\
&= \sum_{i=1}^p E_P \left[\left| \int_0^T B_t^{(n,i)} dW_t^{(i)} \right|^2 \right] \\
&\quad + 2 \sum_{j=2}^p \sum_{i=1}^{j-1} E_P \left[\left(\int_0^T B_t^{(n,i)} dW_t^{(i)} \right) \left(\int_0^T B_t^{(n,j)} dW_t^{(j)} \right) \right].
\end{aligned}$$

Nach der Itoschen Isometrie gilt:

$$E_P \left[\left| \int_0^T B_t^{(n,i)} dW_t^{(i)} \right|^2 \right] = E_P \left[\int_0^T |B_t^{(n,i)}|^2 dt \right].$$

Nach den Orthogonalitätsrelationen gilt für $i \neq j$:

$$E_P \left[\left(\int_0^T B_t^{(n,i)} dW_t^{(i)} \right) \left(\int_0^T B_t^{(n,j)} dW_t^{(j)} \right) \right] = 0.$$

Daraus folgt insgesamt:

$$\sum_{i=1}^p E_P \left[\int_0^T |B_t^{(n,i)}|^2 dt \right] = 0.$$

Daraus folgt:

$$B^{(n,i)} = 0 \quad (\text{fast überall in } I \times \Omega).$$

Nach Punkt 3 folgt daraus:

$$B^{(i)} = 0 \quad (\text{fast überall in } I \times \Omega).$$

Damit ist das Theorem bewiesen.

□

Definition

Seien $X^{(1)}, X^{(2)} \in \mathfrak{I}$ mit folgenden Zerlegungen:

$$X_t^{(k)} = Z^{(k)} + \int_0^t A_s^{(k)} ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \quad (\text{fast sicher}).$$

Wir definieren $\langle X^{(1)} | X^{(2)} \rangle \in \mathfrak{J}$ durch:

$$\langle X^{(1)} | X^{(2)} \rangle_t := \sum_{i=1}^p \int_0^t B_s^{(1,i)} B_s^{(2,i)} ds \quad (\text{fast sicher}).$$

$\langle X^{(1)} | X^{(2)} \rangle$ heisst *quadratische Variation* von $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$.

Definition

Sei $X \in \mathfrak{J}$ mit folgender Zerlegung:

$$X_t = Z + \int_0^t A_s ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t B_s^{(i)} dW_s^{(i)} \quad (\text{fast sicher}).$$

Sei ferner $Y \in \mathfrak{C}_{loc}$. Wir definieren:

$$\int_0^t Y_s dX_s := \int_0^t Y_s A_s ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t Y_s B_s^{(i)} dW_s^{(i)} \quad (\text{fast sicher}).$$

Kurzschreibweise:

$$dX_t = A_t dt + \sum_{i=1}^p B_t^{(i)} dW_t^{(i)}.$$

Notation

1. Seien $x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}$. Wir schreiben:

$$\bar{x} := (x^1, \dots, x^n).$$

2. Seien $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ stochastische Prozesse. Wir schreiben:

$$\bar{X}_t := (X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}).$$

Theorem 2.13 (Itosche Formel)

Sei $f \in \mathcal{C}^{1,2}(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, seien $X^{(1)}, \dots, X^{(n)} \in \mathfrak{J}$, und habe $X^{(k)}$ folgende Zerlegung:

$$X_t^{(k)} = Z^{(k)} + \int_0^t A_s^{(k)} ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \quad (\text{fast sicher}).$$

Dann gilt:

$$f(t, \bar{X}_t) = f(0, \bar{X}_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, \bar{X}_s) ds + \sum_{k=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^k}(s, \bar{X}_s) dX_s^{(k)}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l}(s, \bar{X}_s) d \langle X^{(k)} | X^{(l)} \rangle_s \\
& = f(0, Z) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, \bar{X}_s) ds + \sum_{k=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^k}(s, \bar{X}_s) A_s^{(k)} ds \\
& \quad + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^p \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^k}(s, \bar{X}_s) B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \\
& \quad + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \sum_{i=1}^p \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l}(s, \bar{X}_s) B_s^{(k,i)} B_s^{(l,i)} ds
\end{aligned}$$

(fast sicher).

Kurzschreibweise:

$$\begin{aligned}
df(t, \bar{X}_t) & = \frac{\partial f}{\partial t}(t, \bar{X}_t) dt + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k}(t, \bar{X}_t) dX_t^{(k)} \\
& \quad + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, \bar{X}_t) d \langle X^{(k)} | X^{(l)} \rangle_t \\
& = \frac{\partial f}{\partial t}(t, \bar{X}_t) dt + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k}(t, \bar{X}_t) A^{(k)} dt + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x^k}(t, \bar{X}_t) B^{(k,i)} dW_t^{(i)} \\
& \quad + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, \bar{X}_t) B_t^{(k,i)} B_t^{(l,i)} dt.
\end{aligned}$$

Literaturhinweise

1. Siehe [14], Theorem 2.52, S.51.
2. Siehe [19], Theorem 8.5, S.127.

Beweis

1. Wir definieren eine Folge $(\tau^{(\nu)})_{\nu \in \mathbb{N}}$ von Stoppzeiten durch:

$$\zeta^{(\nu,k)}(\omega) := \begin{cases} 0 & \text{falls } Z(\omega) \geq \nu; \\ T & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\alpha^{(\nu,k)}(\omega) := T \wedge \inf \left\{ t \in I \mid \int_0^t |A_s^{(k)}(\omega)| ds \geq \nu \right\}.$$

$$\beta^{(\nu,k,i)}(\omega) := T \wedge \inf \left\{ t \in I \mid \int_0^t |B_s^{(k,i)}|^2(\omega) ds \geq \nu \right\}.$$

$$\gamma^{(\nu,k,i)}(\omega) := T \wedge \inf \left\{ t \in I \mid \left| \int_0^t B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right|(\omega) \geq \nu \right\}.$$

$$\delta^{(\nu,k,i)}(\omega) := T \wedge \inf \left\{ t \in I \mid \int_0^t \left| \frac{\partial f}{\partial x^k}(s, \bar{X}_s) \right|^2 |B_s^{(k,i)}|^2(\omega) ds \geq \nu \right\}.$$

$$\begin{aligned} \tau^{(\nu)}(\omega) &:= \zeta^{(\nu,1)}(\omega) \wedge \dots \wedge \zeta^{(\nu,n)}(\omega) \wedge \alpha^{(\nu,1)}(\omega) \wedge \dots \wedge \alpha^{(\nu,n)}(\omega) \\ &\quad \wedge \beta^{(\nu,1,1)}(\omega) \wedge \dots \wedge \beta^{(\nu,n,p)}(\omega) \wedge \gamma^{(\nu,1,1)}(\omega) \wedge \dots \wedge \gamma^{(\nu,n,p)}(\omega) \\ &\quad \wedge \delta^{(\nu,1,1)}(\omega) \wedge \dots \wedge \delta^{(\nu,n,p)}(\omega). \end{aligned}$$

Nach Konstruktion gilt:

$$\tau^{(\nu)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T \quad (\text{fast sicher}).$$

Deshalb genügt es, folgende Aussage zu beweisen:

$$\begin{aligned} &f(t \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t \wedge \tau^{(\nu)}}) \\ &= f(0, Z) + \int_0^{t \wedge \tau^{(\nu)}} \frac{\partial f}{\partial t}(s, \bar{X}_s) ds + \sum_{k=1}^n \int_0^{t \wedge \tau^{(\nu)}} \frac{\partial f}{\partial x^k}(s, \bar{X}_s) A_s^{(k)} ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^p \int_0^{t \wedge \tau^{(\nu)}} \frac{\partial f}{\partial x^k}(s, \bar{X}_s) B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \sum_{i=1}^p \int_0^{t \wedge \tau^{(\nu)}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l}(s, \bar{X}_s) B_s^{(k,i)} B_s^{(l,i)} ds \end{aligned}$$

(fast sicher).

2. Wir definieren $t_0, \dots, t_m \in I$ durch:

$$t_\mu := \frac{\mu t}{m}.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} &f(t \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t \wedge \tau^{(\nu)}}) - f(0, Z) \\ &= \sum_{\mu=1}^m \left(f(t_\mu \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_\mu \wedge \tau^{(\nu)}}) - f(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\mu=1}^m \left(f(t_\mu \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_\mu \wedge \tau^{(\nu)}}) - f(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_\mu \wedge \tau^{(\nu)}}) \right) \\
&\quad + \sum_{\mu=1}^m \left(f(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_\mu \wedge \tau^{(\nu)}}) - f(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \right) \\
&= \sum_{\mu=1}^m \left(f(t_\mu \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_\mu \wedge \tau^{(\nu)}}) - f(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_\mu \wedge \tau^{(\nu)}}) \right) \\
&\quad + \sum_{\mu=1}^m \left(f(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) + \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_\mu \wedge \tau^{(\nu)}} \bar{A}_s \, ds + \sum_{i=1}^p \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_\mu \wedge \tau^{(\nu)}} \bar{B}_s^{(i)} \, dW_s^{(i)} \right. \\
&\quad \quad \left. - f(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) + \sum_{i=1}^p \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_\mu \wedge \tau^{(\nu)}} \bar{B}_s^{(i)} \, dW_s^{(i)} \right) \\
&\quad + \sum_{\mu=1}^m \left(f(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) + \sum_{i=1}^p \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_\mu \wedge \tau^{(\nu)}} \bar{B}_s^{(i)} \, dW_s^{(i)} \right. \\
&\quad \quad \left. - f(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \right).
\end{aligned}$$

Nach der bekannten Theorie der Riemann–Stieltjes–Lebesgue–Integrale gilt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mu=1}^m \left(f(t_\mu \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_\mu \wedge \tau^{(\nu)}}) - f(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_\mu \wedge \tau^{(\nu)}}) \right) \\
&\xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_0^{t \wedge \tau^{(\nu)}} \frac{\partial f}{\partial t}(s, \bar{X}_s) \, ds
\end{aligned}$$

(fast sicher).

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mu=1}^m \left(f(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) + \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_\mu \wedge \tau^{(\nu)}} \bar{A}_s \, ds + \sum_{i=1}^p \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_\mu \wedge \tau^{(\nu)}} \bar{B}_s^{(i)} \, dW_s^{(i)} \right. \\
&\quad \quad \left. - f(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) + \sum_{i=1}^p \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_\mu \wedge \tau^{(\nu)}} \bar{B}_s^{(i)} \, dW_s^{(i)} \right) \\
&\xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_0^{t \wedge \tau^{(\nu)}} \frac{\partial f}{\partial x^k}(s, \bar{X}_s) A_s^{(k)} \, ds
\end{aligned}$$

(fast sicher).

Deshalb genügt es, folgende Aussage zu beweisen:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mu=1}^m \left(f\left(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}} + \sum_{i=1}^p \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} \bar{B}_s^{(i)} dW_s^{(i)} \right) \right. \\
& \quad \left. - f\left(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}\right) \right) \\
& \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^p \int_0^{t \wedge \tau^{(\nu)}} \frac{\partial f}{\partial x^k}(s, \bar{X}_s) B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \\
& \quad + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \sum_{i=1}^p \int_0^{t \wedge \tau^{(\nu)}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l}(s, \bar{X}_s) B_s^{(k,i)} B_s^{(l,i)} ds
\end{aligned}$$

(fast sicher).

3. Nach dem Restgliedsatz von Lagrange gilt:

$$\begin{aligned}
& g(x+y) - g(x) \\
& = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial x^k}(x) y^k + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x^k \partial x^l}(x) y^k y^l \\
& \quad + \sum_{k,l=1}^n \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^k \partial x^l}(x + \lambda y) - \frac{\partial^2 g}{\partial x^k \partial x^l}(x) \right) (1-\lambda) d\lambda \right) y^k y^l.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
& f\left(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}} + \sum_{i=1}^p \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} \bar{B}_s^{(i)} dW_s^{(i)}\right) - f\left(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}\right) \\
& = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x^k}\left(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}\right) \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right) \\
& \quad + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \sum_{i,j=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l}\left(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}\right) \\
& \quad \times \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right) \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,j)} dW_s^{(j)} \right) \\
& \quad + \sum_{k,l=1}^n \sum_{i,j=1}^p \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l}\left(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}} + \lambda \sum_{i=1}^p \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} \bar{B}_s^{(i)} dW_s^{(i)} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l}\left(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}\right) \right) (1-\lambda) d\lambda \right)
\end{aligned}$$

$$\times \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right) \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,j)} dW_s^{(j)} \right).$$

Deshalb genügt es, folgende Aussagen zu beweisen:

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x^k} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right) \\ & \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^p \int_0^{t \wedge \tau^{(\nu)}} \frac{\partial f}{\partial x^k} (s, \bar{X}_s) B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \end{aligned}$$

(fast sicher).

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu=1}^m \sum_{k,l=1}^n \sum_{i,j=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \\ & \quad \times \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right) \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,j)} dW_s^{(j)} \right) \\ & \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{k,l=1}^n \sum_{i=1}^p \int_0^{t \wedge \tau^{(\nu)}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (s, \bar{X}_s) B_s^{(k,i)} B_s^{(l,i)} ds \end{aligned}$$

(fast sicher).

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu=1}^m \sum_{k,l=1}^n \sum_{i,j=1}^p \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) + \lambda \sum_{i=1}^p \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} \bar{B}_s^{(i)} dW_s^{(i)} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \right) (1 - \lambda) d\lambda \\ & \quad \times \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right) \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,j)} dW_s^{(j)} \right) \\ & \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

(fast sicher).

4. Nach Theorem 2.9 und Theorem 2.10 gilt:

$$\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} = \int_{t_{\mu-1}}^{t_{\mu}} 1_{\{s \leq \tau^{(\nu)}\}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \quad (\text{fast sicher}).$$

Insbesondere ist der Integrand auf der rechten Seite in \mathfrak{L}^2 . Nach Theorem 2.7 liegt \mathfrak{S} dicht in \mathfrak{L}^2 . Mit Hilfe eines Approximationsargumentes folgt daraus:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial x^k}(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right) \\ &= \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} \frac{\partial f}{\partial x^k}(t_{\mu-1}, \bar{X}_{t_{\mu-1}}) B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Satzes von Lebesgue über dominierende Konvergenz erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu=1}^m 1_{(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)})}(s) \frac{\partial f}{\partial x^k}(t_{\mu-1}, \bar{X}_{t_{\mu-1}}) B_s^{(k,i)} \\ & \xrightarrow[\mathfrak{L}^2]{m \rightarrow \infty} 1_{\{s \leq \tau^{(\nu)}\}} \frac{\partial f}{\partial x^k}(s, \bar{X}_s) B_s^{(k,i)}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Theorem 2.9 und Theorem 2.10 folgt insgesamt:

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x^k}(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right) \\ & \xrightarrow{\mathfrak{M}} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^p \int_0^t 1_{\{s \leq \tau^{(\nu)}\}} \frac{\partial f}{\partial x^k}(s, \bar{X}_s) B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^p \int_0^{t \wedge \tau^{(\nu)}} \frac{\partial f}{\partial x^k}(s, \bar{X}_s) B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \end{aligned}$$

Damit ist die erste Aussage in Punkt 3 bewiesen.

5. Mit Hilfe der Cauchy–Schwarz–Ungleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned} & E_P \left[\left| \sum_{\mu=1}^m \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l}(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) + \lambda \sum_{i=1}^p \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} \bar{B}_s^{(i)} dW_s^{(i)} \right) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l}(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \right) (1 - \lambda) d\lambda \right) \\ & \quad \left. \times \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right) \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,j)} dW_s^{(j)} \right) \right| \right] \\ & \leq E_P \left[\max_{\mu=1, \dots, m} \left| \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l}(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) + \lambda \sum_{i=1}^p \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} \bar{B}_s^{(i)} dW_s^{(i)} \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l}(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \right) (1 - \lambda) d\lambda \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{\mu=1}^m \left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right| \left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,j)} dW_s^{(j)} \right| \\
& \leq \left(E_P \left[\max_{\mu=1, \dots, m} \left| \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) + \lambda \sum_{i=1}^p \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} \bar{B}_s^{(i)} dW_s^{(i)} \right) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \right) (1 - \lambda) d\lambda \right|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad \times \left(E_P \left[\left(\sum_{\mu=1}^m \left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right| \left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,j)} dW_s^{(j)} \right| \right)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Lebesgue über dominierende Konvergenz gilt:

$$\begin{aligned}
& E_P \left[\max_{\mu=1, \dots, m} \left| \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) + \lambda \sum_{i=1}^p \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} \bar{B}_s^{(i)} dW_s^{(i)} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \right) (1 - \lambda) d\lambda \right|^2 \right] \\
& \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Cauchy–Schwarz–Ungleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& E_P \left[\left(\sum_{\mu=1}^m \left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right| \left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,j)} dW_s^{(j)} \right| \right)^2 \right] \\
& \leq E_P \left[\left(\sum_{\mu=1}^m \left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right|^2 \right) \left(\sum_{\mu=1}^m \left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,j)} dW_s^{(j)} \right|^2 \right) \right] \\
& \leq \left(E_P \left[\left(\sum_{\mu=1}^m \left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right|^2 \right)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad \times \left(E_P \left[\left(\sum_{\mu=1}^m \left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,j)} dW_s^{(j)} \right|^2 \right)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Nach Konstruktion gilt:

$$E_P \left[\left(\sum_{\mu=1}^m \left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right|^2 \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\mu=1}^m E_P \left[\left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau(\nu)}^{t_{\mu} \wedge \tau(\nu)} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right|^4 \right] \\
&\quad + 2 \sum_{\mu=1}^{m-1} \sum_{\lambda=\mu+1}^m E_P \left[\left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau(\nu)}^{t_{\mu} \wedge \tau(\nu)} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right|^2 \left| \int_{t_{\lambda-1} \wedge \tau(\nu)}^{t_{\lambda} \wedge \tau(\nu)} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right|^2 \right].
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Itoschen Isometrie und einer Argumentation wie im Beweis der Orthogonalitätsrelationen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mu=1}^m E_P \left[\left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau(\nu)}^{t_{\mu} \wedge \tau(\nu)} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right|^4 \right] \\
&\leq 4\nu^2 \sum_{\mu=1}^m E_P \left[\left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau(\nu)}^{t_{\mu} \wedge \tau(\nu)} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right|^2 \right] \\
&\stackrel{\text{Ito}}{=} 4\nu^2 E_P \left[\int_0^{t \wedge \tau(\nu)} |B_s^{(k,i)}|^2 ds \right] \\
&\leq 4\nu^4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mu=1}^{m-1} \sum_{\lambda=\mu+1}^m E_P \left[\left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau(\nu)}^{t_{\mu} \wedge \tau(\nu)} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right|^2 \left| \int_{t_{\lambda-1} \wedge \tau(\nu)}^{t_{\lambda} \wedge \tau(\nu)} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right|^2 \right] \\
&= \sum_{\mu=1}^{m-1} E_P \left[\left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau(\nu)}^{t_{\mu} \wedge \tau(\nu)} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right|^2 E_P \left[\sum_{\lambda=\mu+1}^m \left| \int_{t_{\lambda-1} \wedge \tau(\nu)}^{t_{\lambda} \wedge \tau(\nu)} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right|^2 \middle| \mathcal{F}_{t_{\mu}} \right] \right] \\
&\stackrel{\text{Orthog.}}{=} \sum_{\mu=1}^{m-1} E_P \left[\left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau(\nu)}^{t_{\mu} \wedge \tau(\nu)} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right|^2 E_P \left[\sum_{\lambda=\mu+1}^m \int_{t_{\lambda-1} \wedge \tau(\nu)}^{t_{\lambda} \wedge \tau(\nu)} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right]^2 \middle| \mathcal{F}_{t_{\mu}} \right] \\
&= \sum_{\mu=1}^{m-1} E_P \left[\left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau(\nu)}^{t_{\mu} \wedge \tau(\nu)} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right|^2 E_P \left[\left| \int_{t_{\mu} \wedge \tau(\nu)}^{t \wedge \tau(\nu)} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right|^2 \middle| \mathcal{F}_{t_{\mu}} \right] \right] \\
&\leq 4\nu^2 \sum_{\mu=1}^{m-1} E_P \left[\left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau(\nu)}^{t_{\mu} \wedge \tau(\nu)} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right|^2 \right] \\
&\stackrel{\text{Ito}}{=} 4\nu^2 E_P \left[\int_0^{t_{m-1} \wedge \tau(\nu)} |B_s^{(k,i)}|^2 ds \right] \\
&\leq 4\nu^4.
\end{aligned}$$

Daraus folgt insgesamt:

$$\begin{aligned}
& E_P \left[\left| \sum_{\mu=1}^m \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) + \lambda \sum_{i=1}^p \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} \bar{B}_s^{(i)} dW_s^{(i)} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \right) (1 - \lambda) d\lambda \right) \\
& \quad \times \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right) \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,j)} dW_s^{(j)} \right) \Bigg| \\
& \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Damit ist die letzte Aussage in Punkt 3 bewiesen.

6. Sei $i \neq j$. Nach Konstruktion gilt:

$$\begin{aligned}
& E_P \left[\left| \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \times \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right) \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,j)} dW_s^{(j)} \right) \right|^2 \right] \\
& = \sum_{\mu=1}^m E_P \left[\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \right|^2 \right. \\
& \quad \left. \times \left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right|^2 \left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,j)} dW_s^{(j)} \right|^2 \right] \\
& + 2 \sum_{\mu=1}^{m-1} \sum_{\lambda=\mu+1}^m E_P \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\lambda-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\lambda-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \right. \\
& \quad \times \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right) \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,j)} dW_s^{(j)} \right) \\
& \quad \left. \times \left(\int_{t_{\lambda-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\lambda} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right) \left(\int_{t_{\lambda-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\lambda} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,j)} dW_s^{(j)} \right) \right].
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Itoschen Isometrie und einer Argumentation wie im Beweis der Orthogonalitätsrelationen erhalten wir:

$$\sum_{\mu=1}^m E_P \left[\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \right|^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right|^2 \left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,j)} dW_s^{(j)} \right|^2 \right] \\
& \leq C \sum_{\mu=1}^m E_P \left[\left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right|^2 \left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,j)} dW_s^{(j)} \right|^2 \right] \\
& \stackrel{\text{Ortog.}}{=} C \sum_{\mu=1}^m E_P \left[\left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right|^2 \right] E_P \left[\left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,j)} dW_s^{(j)} \right|^2 \right] \\
& \stackrel{\text{Ito}}{=} C \sum_{\mu=1}^m E_P \left[\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} |B_s^{(k,i)}|^2 ds \right] E_P \left[\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} |B_s^{(l,j)}|^2 ds \right] \\
& \leq C \left(\max_{\mu=1, \dots, m} E_P \left[\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} |B_s^{(k,i)}|^2 ds \right] \right) E_P \left[\int_0^{t \wedge \tau^{(\nu)}} |B_s^{(l,j)}|^2 ds \right] \\
& \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Nach Konstruktion gilt für $\mu < \lambda$:

$$\begin{aligned}
& E_P \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\lambda-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\lambda-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \right. \\
& \quad \times \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right) \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,j)} dW_s^{(j)} \right) \\
& \quad \times \left(\int_{t_{\lambda-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\lambda} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right) \left(\int_{t_{\lambda-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\lambda} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,j)} dW_s^{(j)} \right) \Big] \\
& = E_P \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\lambda-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\lambda-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \right. \\
& \quad \times \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right) \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,j)} dW_s^{(j)} \right) \\
& \quad \times E_P \left[\left(\int_{t_{\lambda-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\lambda} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right) \left(\int_{t_{\lambda-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\lambda} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,j)} dW_s^{(j)} \right) \Big| \mathcal{F}_{t_{\lambda-1}} \right] \Big].
\end{aligned}$$

Mit Hilfe einer Argumentation wie im Beweis der Orthogonalitätsrelationen erhalten wir für $\mu < \lambda$:

$$E_P \left[\left(\int_{t_{\lambda-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\lambda} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right) \left(\int_{t_{\lambda-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\lambda} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,j)} dW_s^{(j)} \right) \Big| \mathcal{F}_{t_{\lambda-1}} \right] = 0.$$

Daraus folgt insgesamt für $i \neq j$:

$$E_P \left[\left| \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right) \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,j)} dW_s^{(j)} \right) \right|^2 \right] \\ \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Nach Punkt 3 genügt es also, folgende Aussage zu beweisen:

$$\sum_{\mu=1}^m \sum_{k,l=1}^n \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \\ \times \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right) \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,i)} dW_s^{(i)} \right) \\ \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{k,l=1}^n \sum_{i=1}^p \int_0^{t \wedge \tau^{(\nu)}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (s, \bar{X}_s) B_s^{(k,i)} B_s^{(l,i)} ds$$

(fast sicher).

7. Nach dem Satz von Lebesgue über dominierende Konvergenz gilt:

$$\sum_{\mu=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} B_s^{(l,i)} ds \right) \\ = \sum_{\mu=1}^m \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) B_s^{(k,i)} B_s^{(l,i)} ds \\ \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_0^{t \wedge \tau^{(\nu)}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (s, \bar{X}_s) B_s^{(k,i)} B_s^{(l,i)} ds$$

(fast sicher).

Nach Punkt 6 genügt es also, folgende Aussage zu beweisen:

$$\sum_{\mu=1}^m \sum_{k,l=1}^n \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \\ \times \left(\left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right) \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,i)} dW_s^{(i)} \right) - \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} B_s^{(l,i)} ds \right) \\ \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{fast sicher}).$$

8. Wir definieren Zufallsvariablen $Z^{(\mu,k,l,i)}$ durch:

$$Z^{(\mu,k,l,i)} := \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right) \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,i)} dW_s^{(i)} \right) - \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} B_s^{(l,i)} ds.$$

Nach Konstruktion gilt:

$$\begin{aligned} & E_P \left[\left| \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) Z^{(\mu,k,l,i)} \right|^2 \right] \\ &= \sum_{\mu=1}^m E_P \left[\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \right|^2 |Z^{(\mu,k,l,i)}|^2 \right] \\ &\quad + 2 \sum_{\mu=1}^{m-1} \sum_{\lambda=\mu+1}^m E_P \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\lambda-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\lambda-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) Z^{(\mu,k,l,i)} Z^{(\lambda,k,l,i)} \right] \\ &\leq C \sum_{\mu=1}^m E_P [|Z^{(\mu,k,l,i)}|^2] \\ &\quad + 2 \sum_{\mu=1}^{m-1} \sum_{\lambda=\mu+1}^m E_P \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\lambda-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\lambda-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) Z^{(\mu,k,l,i)} Z^{(\lambda,k,l,i)} \right]. \end{aligned}$$

Nach Konstruktion gilt für $\mu < \lambda$:

$$\begin{aligned} & E_P \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\lambda-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\lambda-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \right. \\ &\quad \times \left. Z^{(\mu,k,l,i)} Z^{(\lambda,k,l,i)} \right] \\ &= E_P \left[E_P \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\lambda-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\lambda-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. Z^{(\mu,k,l,i)} Z^{(\lambda,k,l,i)} \middle| \mathcal{F}_{t_{\lambda-1}} \right] \right] \\ &= E_P \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\lambda-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\lambda-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \right. \\ &\quad \times \left. Z^{(\mu,k,l,i)} E_P [Z^{(\lambda,k,l,i)} | \mathcal{F}_{t_{\lambda-1}}] \right]. \end{aligned}$$

Mit Hilfe einer analogen Argumentation wie im Beweis der Itoschen Isometrie sowie der Polarisationsgleichung für Skalarprodukte erhalten wir:

$$\begin{aligned} & E_P \left[\left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right) \left(\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,i)} dW_s^{(i)} \right) \middle| \mathcal{F}_{t_{\lambda-1}} \right] \\ &= E_P \left[\int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} B_s^{(l,i)} ds \middle| \mathcal{F}_{t_{\lambda-1}} \right]. \end{aligned}$$

Daraus folgt äquivalent:

$$E_P[Z^{(\lambda,k,l,i)} | \mathcal{F}_{t_{\lambda-1}}] = 0.$$

Daraus folgt weiter:

$$\begin{aligned} & E_P \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l}(t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l}(t_{\lambda-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\lambda-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) \right. \\ & \quad \left. \times Z^{(\mu,k,l,i)} Z^{(\lambda,k,l,i)} \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Cauchy–Schwarz–Ungleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu=1}^m E_P[|Z^{(\mu,k,l,i)}|^2] \\ & \leq 2 \sum_{\mu=1}^m E_P \left[\left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right|^2 \left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,i)} dW_s^{(i)} \right|^2 \right] \\ & \quad + 2 \sum_{\mu=1}^m E_P \left[\left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} B_s^{(l,i)} ds \right|^2 \right] \\ & \leq 2 E_P \left[\left(\max_{\mu=1, \dots, m} \left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right|^2 \right) \left(\sum_{\mu=1}^m \left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,i)} dW_s^{(i)} \right|^2 \right) \right] \\ & \quad + 2 E_P \left[\left(\max_{\mu=1, \dots, m} \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} |B_s^{(k,i)} B_s^{(l,i)}| ds \right) \left(\int_0^{t \wedge \tau^{(\nu)}} |B_s^{(k,i)} B_s^{(l,i)}| ds \right) \right] \\ & \leq 2 \left(E_P \left[\left(\max_{\mu=1, \dots, m} \left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right|^4 \right) \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad \times \left(E_P \left[\left(\sum_{\mu=1}^m \left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,i)} dW_s^{(i)} \right|^2 \right)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$+ 2 E_P \left[\left(\max_{\mu=1, \dots, m} \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} |B_s^{(k,i)} B_s^{(l,i)}| ds \right) \left(\int_0^{t \wedge \tau^{(\nu)}} |B_s^{(k,i)} B_s^{(l,i)}| ds \right) \right].$$

Nach dem Satz von Lebesgue über dominierende Konvergenz gilt:

$$E_P \left[\left(\max_{\mu=1, \dots, m} \left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(k,i)} dW_s^{(i)} \right|^4 \right) \right] \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

$$E_P \left[\left(\max_{\mu=1, \dots, m} \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} |B_s^{(k,i)} B_s^{(l,i)}| ds \right) \left(\int_0^{t \wedge \tau^{(\nu)}} |B_s^{(k,i)} B_s^{(l,i)}| ds \right) \right] \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

In Punkt 5 wurde gezeigt:

$$E_P \left[\left(\sum_{\mu=1}^m \left| \int_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}^{t_{\mu} \wedge \tau^{(\nu)}} B_s^{(l,i)} dW_s^{(i)} \right|^2 \right)^2 \right] \leq C \nu^4.$$

Daraus folgt insgesamt:

$$E_P \left[\left| \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} (t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}, \bar{X}_{t_{\mu-1} \wedge \tau^{(\nu)}}) Z^{(\mu,k,l,i)} \right|^2 \right] \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Damit ist das Theorem bewiesen.

□

2.6 Stochastische Differentialgleichungen

Voraussetzungen

1. Seien $Z^{(1)}, \dots, Z^{(n)}$ \mathcal{F}_0 -messbare Zufallsvariablen.
2. Seien $a^{(1)}, \dots, a^{(n)} : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
3. Seien $b^{(1,1)}, \dots, b^{(n,p)} : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Anfangswertproblem

$$X_t^{(k)} = Z^{(k)} + \int_0^t a^{(k)}(s, \bar{X}_s) ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t b^{(k,i)}(s, \bar{X}_s) dW_s^{(i)}.$$

Kurzschreibweise:

$$dX_t^{(k)} = a^{(k)}(t, \bar{X}_t) dt + \sum_{i=1}^p b^{(k,i)}(t, \bar{X}_t) dW_t^{(i)}.$$

$$X_0^{(k)} = Z^{(k)}.$$

Definition

Seien $X^{(1)}, \dots, X^{(n)} \in \mathfrak{J}$. \bar{X} heisst *Lösung* des obigen Anfangswertproblems, falls gilt:

1. $a^{(k)}(t, \bar{X}_t) \in \mathfrak{L}_{loc}^1$.
2. $b^{(k,i)}(t, \bar{X}_t) \in \mathfrak{L}_{loc}^2$.
3. $X^{(k)}$ besitzt folgende Zerlegung:

$$X_t^{(k)} = Z^{(k)} + \int_0^t a^{(k)}(s, \bar{X}_s) ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t b^{(k,i)}(s, \bar{X}_s) dW_s^{(i)} \quad (\text{fast sicher}).$$

Theorem 2.14 (Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen)

Seien folgende Voraussetzungen gegeben:

1. $Z^{(1)}, \dots, Z^{(n)}$ genügen den folgenden Integrierbarkeitsbedingungen:

$$E_P[|Z^{(k)}|^2] < \infty.$$

2. $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ sowie $b^{(1,1)}, \dots, b^{(n,p)}$ sind stetig.
3. $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ sowie $b^{(1,1)}, \dots, b^{(n,p)}$ genügen den folgenden Wachstumsbedingungen:

$$|a^{(k)}(t, \bar{x})| \leq C (1 + |x^1| + \dots + |x^n|).$$

$$|b^{(k,i)}(t, \bar{x})| \leq C (1 + |x^1| + \dots + |x^n|).$$

4. $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ sowie $b^{(1,1)}, \dots, b^{(n,p)}$ genügen den folgenden Lipschitzbedingungen:

$$|a^{(k)}(t, \bar{x}) - a^{(k)}(t, \bar{y})| \leq C (|x^1 - y^1| + \dots + |x^n - y^n|).$$

$$|b^{(k,i)}(t, \bar{x}) - b^{(k,i)}(t, \bar{y})| \leq C (|x^1 - y^1| + \dots + |x^n - y^n|).$$

Dann gilt:

- (a) Das obige Anfangswertproblem besitzt genau eine Lösung \bar{X} .
- (b) Die Lösung \bar{X} besitzt folgende Regularität:

$$X^{(k)} \in \mathfrak{C}.$$

Literaturhinweise

1. Siehe [15], Theorem 3.5.5, S.53.
2. Siehe [1], Satz 6.2.2, S.118.
3. Siehe [14], Theorem 3.22, S.112.

Beweis

1. Wir definieren ein Funktional $\bar{\Phi} : \mathfrak{C}^n \longrightarrow \mathfrak{C}^n$ durch:

$$(\bar{\Phi}^{(k)}[\bar{X}])_t := Z^{(k)} + \int_0^t a^{(k)}(s, \bar{X}_s) ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t b^{(k,i)}(s, \bar{X}_s) dW_s^{(i)}.$$

Offensichtlich ist $\bar{X} \in \mathfrak{C}^n$ genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems, wenn \bar{X} ein Fixpunkt von $\bar{\Phi}$ ist. Wir wollen zunächst mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes zeigen, dass $\bar{\Phi}$ genau einen Fixpunkt hat. Dazu verwenden wir folgende Norm in \mathfrak{C}^n :

$$\|\bar{X}\|_{\mathfrak{C}^n}^2 := \sum_{k=1}^n \|X^{(k)}\|_{\mathfrak{C}}^2.$$

2. Wir zeigen, dass $\bar{\Phi}$ tatsächlich eine Selbstabbildung auf \mathfrak{C}^n ist. Sei dazu $\bar{X} \in \mathfrak{C}^n$. Mit Hilfe der Cauchy–Schwarz–Ungleichung in $L^2(\Omega)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \|\bar{\Phi}[\bar{X}]\|_{\mathfrak{C}^n}^2 &\leq (p+2) \left(\sum_{k=1}^n E_P[|Z^{(k)}|^2] + \sum_{k=1}^n E_P \left[\left(\int_0^T |a^{(k)}(s, \bar{X}_s)| ds \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^p E_P \left[\sup_{t \in I} \left| \int_0^t b^{(k,i)}(s, \bar{X}_s) dW_s^{(i)} \right|^2 \right] \right). \end{aligned}$$

Nach Konstruktion gilt:

$$E_P[|Z^{(k)}|^2] < \infty.$$

Mit Hilfe der Wachstumsbedingungen für $a^{(k)}$ erhalten wir für eine geeignete Konstante $K > 0$:

$$\begin{aligned} E_P \left[\left(\int_0^T |a^{(k)}(s, \bar{X}_s)| ds \right)^2 \right] &\leq T^2 E_P \left[\sup_{t \in I} |a^{(k)}(t, \bar{X}_t)|^2 \right] \\ &\leq K T^2 (1 + \|\bar{X}\|_{\mathfrak{C}^n}^2) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Itoschen Isometrie sowie der Wachstumsbedingungen für $b^{(k,i)}$ erhalten wir für eine geeignete Konstante $K > 0$:

$$\begin{aligned}
E_P \left[\sup_{t \in I} \left| \int_0^t b^{(k,i)}(s, \bar{X}_s) dW_s^{(i)} \right|^2 \right] &\leq E_P \left[\int_0^T |b^{(k,i)}(s, \bar{X}_s)|^2 ds \right] \\
&\leq T E_P \left[\sup_{t \in I} |b^{(k,i)}(t, \bar{X}_t)|^2 \right] \\
&\leq K T (1 + \|\bar{X}\|_{\mathfrak{C}^n}^2) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Also ist $\bar{\Phi}[\bar{X}] \in \mathfrak{C}^n$.

3. Sei $\Theta \in I$ mit $\Theta \leq T$. Wir betrachten nun Θ an Stelle von T . Wir zeigen, dass $\bar{\Phi}$ für hinreichend kleine Θ eine Kontraktion auf \mathfrak{C}^n ist. Seien dazu $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{C}^n$. Mit Hilfe der Cauchy–Schwarz–Ungleichung in $L^2(\Omega)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\|\bar{\Phi}[\bar{X}] - \bar{\Phi}[\bar{Y}]\|_{\mathfrak{C}^n}^2 \\
&\leq (p+1) \left(\sum_{k=1}^n E_P \left[\left(\int_0^\Theta |a^{(k)}(s, \bar{X}_s) - a^{(k)}(s, \bar{Y}_s)| ds \right)^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^p E_P \left[\sup_{0 \leq t \leq \Theta} \left| \int_0^t (b^{(k,i)}(s, \bar{X}_s) - b^{(k,i)}(s, \bar{Y}_s)) dW_s^{(i)} \right|^2 \right] \right).
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Lipschitz–Bedingungen für $a^{(k)}$ erhalten wir für eine geeignete Konstante $K > 0$:

$$\begin{aligned}
&E_P \left[\left(\int_0^\Theta |a^{(k)}(s, \bar{X}_s) - a^{(k)}(s, \bar{Y}_s)| ds \right)^2 \right] \\
&\leq \Theta^2 E_P \left[\sup_{0 \leq t \leq \Theta} |a^{(k)}(t, \bar{X}_t) - a^{(k)}(t, \bar{Y}_t)|^2 \right] \\
&\leq K \Theta^2 \|\bar{X} - \bar{Y}\|_{\mathfrak{C}^n}^2.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Itoschen Isometrie sowie der Lipschitz–Bedingungen für $b^{(k,i)}$ erhalten wir für eine geeignete Konstante $K > 0$:

$$\begin{aligned}
&E_P \left[\sup_{0 \leq t \leq \Theta} \left| \int_0^t (b^{(k,i)}(s, \bar{X}_s) - b^{(k,i)}(s, \bar{Y}_s)) dW_s^{(i)} \right|^2 \right] \\
&\leq E_P \left[\int_0^\Theta |b^{(k,i)}(s, \bar{X}_s)|^2 ds \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \Theta E_P \left[\sup_{0 \leq t \leq \Theta} |b^{(k,i)}(t, \bar{X}_t) - b^{(k,i)}(t, \bar{Y}_t)|^2 \right] \\ &\leq K \Theta \|\bar{X} - \bar{Y}\|_{\mathfrak{C}^n}^2. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir für eine geeignete Konstante $K > 0$:

$$\|\bar{\Phi}[\bar{X}] - \bar{\Phi}[\bar{Y}]\|_{\mathfrak{C}^n}^2 \leq K \Theta (\Theta + 1) \|\bar{X} - \bar{Y}\|_{\mathfrak{C}^n}^2.$$

Dabei hängt K nicht von der speziellen Wahl von Θ ab. Insbesondere gilt für hinreichend kleine Θ :

$$\|\bar{\Phi}[\bar{X}] - \bar{\Phi}[\bar{Y}]\|_{\mathfrak{C}^n} \leq \frac{1}{2} \|\bar{X} - \bar{Y}\|_{\mathfrak{C}^n}.$$

Also ist $\bar{\Phi}$ eine Kontraktion auf \mathfrak{C}^n .

4. Wir zeigen nun die Existenz von Lösungen des Anfangswertproblems.

4.1 Wir betrachten wieder Θ an Stelle von T . Nach Punkt 2 und Punkt 3 ist $\bar{\Phi} : \mathfrak{C}^n \rightarrow \mathfrak{C}^n$ eine Kontraktion. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz besitzt $\bar{\Phi}$ genau einen Fixpunkt $\bar{X} \in \mathfrak{C}^n$. Nach Punkt 1 ist \bar{X} die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems im Zeitintervall $[0, \Theta]$.

4.2 Sei $\nu \in \mathbb{N}$ mit $\nu \Theta < T$. Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem:

$$X_t^{(k)} = X_{\nu\Theta}^{(k)} + \int_{\nu\Theta}^t a^{(k)}(s, \bar{X}_s) ds + \sum_{i=1}^p \int_{\nu\Theta}^t b^{(k,i)}(s, \bar{X}_s) dW_s^{(i)}.$$

Wie oben erhalten wir die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $\bar{X} \in \mathfrak{C}^n$ des Anfangswertproblems im Zeitintervall $[\nu\Theta, (\nu+1)\Theta \wedge T]$.

4.3 Nach den Punkten 4.1 und 4.2 besitzt das ursprüngliche Anfangswertproblem genau eine Lösung $\bar{X} \in \mathfrak{C}^n$ im Zeitintervall $I = [0, T]$.

5. Sei $\bar{Y} \in \mathfrak{J}$ eine weitere Lösung des Anfangswertproblems. Wir beweisen folgende Aussage:

$$\bar{X}_t = \bar{Y}_t \quad (\text{fast sicher}).$$

Nach Punkt 4 genügt es, folgende Aussage zu beweisen:

$$\bar{Y} \in \mathfrak{C}^n.$$

6. Wir definieren eine Folge $(\tau^{(\nu)})_{\nu \in \mathbb{N}}$ von Stoppzeiten durch:

$$\alpha^{(\nu,k)}(\omega) := \inf \left\{ t \in I \mid |Y_t^{(k)}(\omega)| \geq \nu \right\}.$$

$$\beta^{(\nu,k,i)}(\omega) := \inf \left\{ t \in I \mid \int_0^t |b^{(k,i)}(s, \bar{Y}_s(\omega))|^2 ds \geq \nu \right\}.$$

$$\tau^{(\nu)}(\omega) := T \wedge \alpha^{(\nu,1)}(\omega) \wedge \dots \wedge \alpha^{(\nu,n)}(\omega) \wedge \beta^{(\nu,1,1)}(\omega) \wedge \dots \wedge \beta^{(\nu,n,p)}(\omega).$$

Nach Konstruktion gilt:

$$\tau^{(\nu)} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} T \quad (\text{fast sicher}).$$

7. Mit Hilfe des Anfangswertproblems für \bar{Y} sowie der Cauchy–Schwarz–Ungleichung in $L^2(\Omega)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} & E_P \left[\sup_{0 \leq s \leq \tau^{(\nu)} \wedge t} |Y_s^{(k)}|^2 \right] \\ & \leq (p+2) \left(E_P[|Z^{(k)}|^2] + E_P \left[\left(\int_0^{\tau^{(\nu)} \wedge t} |a^{(k)}(s, \bar{Y}_s)| ds \right)^2 \right] \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^p E_P \left[\sup_{0 \leq s \leq \tau^{(\nu)} \wedge t} \left| \int_0^s b^{(k,i)}(r, \bar{Y}_r) dW_r^{(i)} \right|^2 \right] \right). \end{aligned}$$

Nach Konstruktion gilt:

$$E_P[|Z^{(k)}|^2] < \infty.$$

Mit Hilfe der Wachstumsbedingungen für $a^{(k)}$ erhalten wir für eine geeignete Konstante $K > 0$:

$$\begin{aligned} & E_P \left[\left(\int_0^{\tau^{(\nu)} \wedge t} |a^{(k)}(s, \bar{Y}_s)| ds \right)^2 \right] \\ & \leq T E_P \left[\int_0^{\tau^{(\nu)} \wedge t} |a^{(k)}(s, \bar{Y}_s)|^2 ds \right] \\ & \leq K T \left(T + \sum_{k=1}^n E_P \left[\int_0^{\tau^{(\nu)} \wedge t} |Y_s^{(k)}|^2 ds \right] \right) \\ & \leq K T \left(T + \sum_{k=1}^n \int_0^t E_P \left[\sup_{0 \leq r \leq \tau^{(\nu)} \wedge s} |Y_r^{(k)}|^2 \right] ds \right). \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Theorem 2.8, Theorem 2.9 und Theorem 2.10, der Itoschen Isometrie sowie der Wachstumsbedingungen für $b^{(k,i)}$ erhalten wir für eine geeignete Konstante $K > 0$:

$$E_P \left[\sup_{0 \leq s \leq \tau^{(\nu)} \wedge t} \left| \int_0^s b^{(k,i)}(r, \bar{Y}_r) dW_r^{(i)} \right|^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= E_P \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \left| 1_{\{s \leq \tau^{(\nu)} \wedge t\}} \int_0^s b^{(k,i)}(r, \bar{Y}_r) dW_r^{(i)} \right|^2 \right] \\
&= E_P \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \left| 1_{\{s \leq \tau^{(\nu)} \wedge t\}} \int_0^s 1_{\{r \leq \tau^{(\nu)} \wedge t\}} b^{(k,i)}(r, \bar{Y}_r) dW_r^{(i)} \right|^2 \right] \\
&\leq E_P \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s 1_{\{r \leq \tau^{(\nu)} \wedge t\}} b^{(k,i)}(r, \bar{Y}_r) dW_r^{(i)} \right|^2 \right] \\
&\leq E_P \left[\int_0^t 1_{\{r \leq \tau^{(\nu)} \wedge t\}} |b^{(k,i)}(r, \bar{Y}_r)|^2 dr \right] \\
&= E_P \left[\int_0^{\tau^{(\nu)} \wedge t} |b^{(k,i)}(r, \bar{Y}_r)|^2 dr \right] \\
&\leq K \left(T + \sum_{k=1}^n E_P \left[\int_0^{\tau^{(\nu)} \wedge t} |Y_s^{(k)}|^2 ds \right] \right) \\
&\leq K \left(T + \sum_{k=1}^n \int_0^t E_P \left[\sup_{0 \leq r \leq \tau^{(\nu)} \wedge s} |Y_r^{(k)}|^2 \right] ds \right).
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir für eine geeignete Konstante $K > 0$:

$$\begin{aligned}
&E_P \left[\sup_{0 \leq s \leq \tau^{(\nu)} \wedge t} |Y_s^{(k)}|^2 \right] \\
&\leq K \left(1 + T^2 + \sum_{k=1}^n \int_0^t E_P \left[\sup_{0 \leq r \leq \tau^{(\nu)} \wedge s} |Y_r^{(k)}|^2 \right] ds \right).
\end{aligned}$$

8. Wir definieren stetige Funktionen $u^{(\nu)} : I \rightarrow [0, \infty)$ durch:

$$u^{(\nu)}(t) := \sum_{k=1}^n E_P \left[\sup_{0 \leq s \leq \tau^{(\nu)} \wedge t} |Y_s^{(k)}|^2 \right].$$

Nach Punkt 7 gilt:

$$u^{(\nu)}(t) \leq K \left(1 + T^2 + \int_0^t u^{(\nu)}(s) ds \right)$$

Nach dem Lemma von Gronwall gilt:

$$u^{(\nu)}(T) \leq K (1 + T^2) (1 + \exp(KT)).$$

9. Nach dem Lemma von Fatou und Punkt 8 gilt:

$$\|\bar{Y}\|_{\mathcal{G}^n}^2 = \sum_{k=1}^n E_P \left[\sup_{t \in I} |Y_t^{(k)}|^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n E_P \left[\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq \tau^{(\nu)}} |Y_t^{(k)}|^2 \right] \\
&\leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n E_P \left[\sup_{0 \leq t \leq \tau^{(\nu)}} |Y_t^{(k)}|^2 \right] \\
&= \liminf_{\nu \rightarrow \infty} u^{(\nu)}(T) \\
&\leq K(1+T^2)(1+\exp(KT)).
\end{aligned}$$

Also ist $\bar{Y} \in \mathfrak{C}^n$. Damit ist das Theorem bewiesen.

□

2.7 Beispiel: Lineare stochastische Differentialgleichungen

Wir betrachten den Fall $n = 1$.

Voraussetzungen

1. Sei die folgende Integrierbarkeitsbedingung erfüllt:

$$E_P[|Z|^2] < \infty.$$

2. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.
3. Seien $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.
4. Seien $g^{(1)}, \dots, g^{(p)} : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.
5. Seien $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(p)} : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Homogenes lineares Anfangswertproblem

$$\Phi_t = 1 + \int_0^t \phi(s) \Phi_s \, ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t \psi^{(i)}(s) \Phi_s \, dW_s^{(i)}.$$

1. Nach Theorem 2.14 besitzt das homogene lineare Anfangswertproblem genau eine Lösung Φ .
2. Ansatz:

$$\Phi_t = \exp \left(\int_0^t A_s \, ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t B_s^{(i)} \, dW_s^{(i)} \right).$$

Nach der Itoschen Formel gilt:

$$\Phi_t = 1 + \int_0^t \left(A_s + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p |B_s^{(i)}|^2 \right) \Phi_s ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t B_s^{(i)} \Phi_s dW_s^{(i)}.$$

Wir wählen:

$$A_t := \phi(t) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p |\psi^{(i)}(t)|^2.$$

$$B_t^{(i)} := \psi^{(i)}(t).$$

3. Die Lösung des linearen homogenen Anfangswertproblems ist gegeben durch:

$$\Phi_t := \exp \left(\int_0^t \left(\phi(s) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p |\psi^{(i)}(s)|^2 \right) ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t \psi^{(i)}(s) dW_s^{(i)} \right).$$

Inhomogenes lineares Anfangswertproblem

$$X_t = Z + \int_0^t \left(f(s) + \phi(s) X_s \right) ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t \left(g^{(i)}(s) + \psi^{(i)}(s) X_s \right) dW_s^{(i)}.$$

1. Nach Theorem 2.14 besitzt das homogene lineare Anfangswertproblem genau eine Lösung X .
2. Ansatz (Variation der Konstanten):

$$X_t = \Phi_t \left(Z + \int_0^t A_s ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t B_s^{(i)} dW_s^{(i)} \right).$$

Nach der Itoschen Formel gilt:

$$\begin{aligned} X_t &= Z + \int_0^t \phi(s) X_s ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t \psi^{(i)}(s) X_s dW_s^{(i)} \\ &\quad + \int_0^t \left(A_s + \sum_{i=1}^p B_s^{(i)} \psi_s^{(i)} \right) \Phi_s ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t B_s^{(i)} \Phi_s dW_s^{(i)} \end{aligned}$$

Wir wählen:

$$A_t := \frac{1}{\Phi_t} \left(f(t) - \sum_{i=1}^p g^{(i)}(t) \psi^{(i)}(t) \right).$$

$$B_t^{(i)} := \frac{g^{(i)}(t)}{\Phi_t}.$$

3. Die Lösung des linearen inhomogenen Anfangswertproblems ist gegeben durch:

$$X_t = \Phi_t \left(Z + \int_0^t \frac{1}{\Phi_s} \left(f(s) - \sum_{i=1}^p g^{(i)}(s) \psi^{(i)}(s) \right) ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t \frac{g^{(i)}(s)}{\Phi_s} dW_s^{(i)} \right).$$

2.8 Diffusionsgleichungen

Voraussetzungen (I)

1. Seien $z^1, \dots, z^n \in \mathbb{R}$.
2. Seien $a^{(1)}, \dots, a^{(n)} : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

2.1 $a^{(k)} \in \mathcal{C}^0(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

2.2 $a^{(k)}$ genügt der folgenden Wachstumsbedingung:

$$|a^{(k)}(t, \bar{x})| \leq C (1 + |x^1| + \dots + |x^n|).$$

2.3 $a^{(k)}$ genügt der folgenden Lipschitzbedingung:

$$|a^{(k)}(t, \bar{x}) - a^{(k)}(t, \bar{y})| \leq C (|x^1 - y^1| + \dots + |x^n - y^n|).$$

3. Seien $b^{(1,1)}, \dots, b^{(n,p)} : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

3.1 $b^{(k,i)} \in \mathcal{C}^0(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

3.2 $b^{(k,i)}$ genügt der folgenden Wachstumsbedingung:

$$|b^{(k,i)}(t, \bar{x})| \leq C (1 + |x^1| + \dots + |x^n|).$$

3.3 $b^{(k,i)}$ genügt der folgenden Lipschitzbedingung:

$$|b^{(k,i)}(t, \bar{x}) - b^{(k,i)}(t, \bar{y})| \leq C (|x^1 - y^1| + \dots + |x^n - y^n|).$$

Anfangswertproblem

$$X_t^{(k)} = z^k + \int_0^t a^{(k)}(s, \bar{X}_s) ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t b^{(k,i)}(s, \bar{X}_s) dW_s^{(i)}.$$

Nach Theorem 2.14 besitzt das Anfangswertproblem genau eine Lösung \bar{X} .

Voraussetzungen (II)

1. Sei $\lambda : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1.1 $\lambda \in \mathcal{C}^0(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

1.2 λ genügt der folgenden Beschränktheitsbedingung:

$$0 \leq \lambda(t, \bar{x}) \leq C.$$

2. Sei $f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

2.1 $f \in \mathcal{C}^0(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

2.2 f genügt der folgenden Wachstumsbedingung:

$$|f(t, \bar{x})| \leq C (1 + |x^1|^2 + \dots + |x^n|^2).$$

3. Sei $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

3.1 $v \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

3.2 v genügt der folgenden Wachstumsbedingung:

$$|v(\bar{x})| \leq C (1 + |x^1| + \dots + |x^n|).$$

4. Sei $u : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

4.1 $u \in \mathcal{C}^0(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

4.2 u genügt den folgenden Wachstumsbedingungen:

$$|u(t, \bar{x})| \leq C (1 + |x^1| + \dots + |x^n|).$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x^k}(t, \bar{x}) \right| \leq C.$$

Cauchysches Problem

Wir betrachten das folgende Cauchysche Problem:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial t}(t, \bar{x}) &= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{i=1}^p b^{(k,i)}(t, \bar{x}) b^{(l,i)}(t, \bar{x}) \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial x^l}(t, \bar{x}) \\ &+ \sum_{k=1}^n a^{(k)}(t, \bar{x}) \frac{\partial u}{\partial x^k}(t, \bar{x}) - \lambda(t, \bar{x}) u(t, \bar{x}) + f(t, \bar{x}). \end{aligned}$$

$$u(T, \bar{x}) = v(\bar{x}).$$

u heisst *Lösung* des Cauchyschen Problems, falls gilt:

1. u genügt der partiellen Differentialgleichung $((t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n)$.
2. u genügt der Endbedingung $(x \in \mathbb{R}^n)$.

Dirichletsches Problem

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\bar{z} \in G$, und sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ der Rand von G . Wir betrachten das folgende Dirichletsche Problem:

$$-\frac{\partial u}{\partial t}(t, \bar{x}) = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{i=1}^p b^{(k,i)}(t, \bar{x}) b^{(l,i)}(t, \bar{x}) \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial x^l}(t, \bar{x}) \\ + \sum_{k=1}^n a^{(k)}(t, \bar{x}) \frac{\partial u}{\partial x^k}(t, \bar{x}) - \lambda(t, \bar{x}) u(t, \bar{x}) + f(t, \bar{x}).$$

$$u(T, \bar{x}) = v(\bar{x}).$$

$$u(t, \bar{x}) \Big|_{\bar{x} \in \Gamma} = 0.$$

u heisst *Lösung* des Dirichletschen Problems, falls gilt:

1. u genügt der partiellen Differentialgleichung $((t, \bar{x}) \in [0, T] \times G)$.
2. u genügt der Endbedingung $(\bar{x} \in G)$.
3. u genügt der Randbedingung $((t, \bar{x}) \in I \times \Gamma)$.

Wir definieren eine Stoppzeit $\tau^{(\bar{X}, G)}$ durch:

$$\tau^{(\bar{X}, G)} := \inf \{ t \in I \mid \bar{X}_t \in \Gamma \}.$$

Stefansches Problem

Wir betrachten das folgende Stefansche Problem:

$$-\frac{\partial u}{\partial t}(t, \bar{x}) \geq \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{i=1}^p b^{(k,i)}(t, \bar{x}) b^{(l,i)}(t, \bar{x}) \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial x^l}(t, \bar{x}) \\ + \sum_{k=1}^n a^{(k)}(t, \bar{x}) \frac{\partial u}{\partial x^k}(t, \bar{x}) - \lambda(t, \bar{x}) u(t, \bar{x}) + f(t, \bar{x}).$$

$$u(t, \bar{x}) \geq v(\bar{x}).$$

$$u(T, \bar{x}) = v(\bar{x}).$$

u heisst *Lösung* des Stefanschen Problems, falls gilt:

1. u genügt den beiden Inklusionen $((t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n)$.
2. Für jeweils mindestens eine der beiden Inklusionen gilt Gleichheit $((t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n)$.
3. u genügt der Endbedingung $(x \in \mathbb{R}^n)$.

Wir definieren eine Stoppzeit $\bar{\tau}$ mit $\bar{\tau} \in I$ durch:

$$\bar{\tau} := \inf \{t \in I \mid u(t, \bar{X}_t) = v(\bar{X}_t)\}.$$

Theorem 2.15 (Feynman–Kac Formeln)

(a) Sei u eine Lösung des Cauchyschen Problems. Dann gilt:

$$\begin{aligned} u(0, \bar{z}) &= E_P \left[\exp \left(- \int_0^T \lambda(t, \bar{X}_t) dt \right) v(\bar{X}_T) \right] \\ &\quad + E_P \left[\int_0^T \exp \left(- \int_0^t \lambda(s, \bar{X}_s) ds \right) f(t, \bar{X}_t) dt \right]. \end{aligned}$$

(b) Sei u eine Lösung des Dirichletschen Problems. Dann gilt:

$$\begin{aligned} u(0, \bar{z}) &= E_P \left[1_{\{\tau(\bar{X}, G) = \infty\}} \exp \left(- \int_0^T \lambda(t, \bar{X}_t) dt \right) v(\bar{X}_T) \right] \\ &\quad + E_P \left[\int_0^{\tau(\bar{X}, G) \wedge T} \exp \left(- \int_0^t \lambda(s, \bar{X}_s) ds \right) f(t, \bar{X}_t) dt \right]. \end{aligned}$$

(c) Sei u eine Lösung des Stefanschen Problems. Dann gilt:

$$\begin{aligned} u(0, \bar{z}) &= E_P \left[\exp \left(- \int_0^{\bar{\tau}} \lambda(t, \bar{X}_t) dt \right) v(\bar{X}_{\bar{\tau}}) \right] \\ &\quad + E_P \left[\int_0^{\bar{\tau}} \exp \left(- \int_0^t \lambda(s, \bar{X}_s) ds \right) f(t, \bar{X}_t) dt \right] \\ &= \sup \left\{ E_P \left[\exp \left(- \int_0^{\tau} \lambda(t, \bar{X}_t) dt \right) v(\bar{X}_{\tau}) \right] \right. \\ &\quad \left. + E_P \left[\int_0^{\tau} \exp \left(- \int_0^t \lambda(s, \bar{X}_s) ds \right) f(t, \bar{X}_t) dt \right] \right. \\ &\quad \left. \mid \tau \text{ ist Stoppzeit mit } \tau \in I \right\}. \end{aligned}$$

Literaturhinweise

1. Siehe [15], folgende Referenzen:

- Theorem 5.1.7, S.99.
- Theorem 5.1.9, S.102.
- Theorem 5.3.2, S.111.

2. Siehe [14], Theorem 3.26, S.119.

Beweis

Wir definieren stochastische Prozesse Λ, Φ, Ψ, U durch:

$$\Lambda_t := \exp\left(-\int_0^t \lambda(s, \bar{X}_s) ds\right).$$

$$\Phi_t := \int_0^t \Lambda_s f(s, \bar{X}_s) ds.$$

$$\Psi_t := u(t, \bar{X}_t).$$

$$U_t := \Lambda_t \Psi_t + \Phi_t.$$

Nach der Itoschen Formel gilt:

$$d\Lambda_t = -\Lambda_t \lambda(t, \bar{X}_t) dt.$$

$$d\Phi_t = \Lambda_t f(t, \bar{X}_t) dt.$$

$$\begin{aligned} d\Psi_t &= \frac{\partial u}{\partial t}(t, \bar{X}_t) dt + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial x^l}(t, \bar{X}_t) \langle dX^{(k)} | dX^{(l)} \rangle_t \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^k}(t, \bar{X}_t) dX_t^{(k)} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(t, \bar{X}_t) dt + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{i=1}^p b^{(k,i)}(t, \bar{X}_t) b^{(l,i)}(t, \bar{X}_t) \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial x^l}(t, \bar{X}_t) dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^n a^{(k)}(t, \bar{X}_t) \frac{\partial u}{\partial x^k}(t, \bar{X}_t) dt + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^p b^{(k,i)}(t, \bar{X}_t) \frac{\partial u}{\partial x^k}(t, \bar{X}_t) dW_t^{(i)}. \end{aligned}$$

$$d(\Lambda_t \Psi_t) = d\Lambda_t \Psi_t + \Lambda_t d\Psi_t = -\Lambda_t \lambda(t, \bar{X}_t) u(t, \bar{X}_t) dt + \Lambda_t d\Psi_t.$$

$$dU_t = d(\Lambda_t \Psi_t) + d\Phi_t$$

$$\begin{aligned} &= \Lambda_t \left\{ \frac{\partial u}{\partial t}(t, \bar{X}_t) + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{i=1}^p b^{(k,i)}(t, \bar{X}_t) b^{(l,i)}(t, \bar{X}_t) \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial x^l}(t, \bar{X}_t) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n a^{(k)}(t, \bar{X}_t) \frac{\partial u}{\partial x^k}(t, \bar{X}_t) - \lambda(t, \bar{X}_t) u(t, \bar{X}_t) + f(t, \bar{X}_t) \right\} dt \\ &\quad + \Lambda_t \left\{ \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^p b^{(k,i)}(t, \bar{X}_t) \frac{\partial u}{\partial x^k}(t, \bar{X}_t) \right\} dW_t^{(i)}. \end{aligned}$$

Wir definieren stochastische Prozesse $A, B^{(1)}, \dots, B^{(p)}$ durch:

$$\begin{aligned} A_t &:= \Lambda_t \left\{ \frac{\partial u}{\partial t}(t, \bar{X}_t) + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{i=1}^p b^{(k,i)}(t, \bar{X}_t) b^{(l,i)}(t, \bar{X}_t) \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial x^l}(t, \bar{X}_t) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n a^{(k)}(t, \bar{X}_t) \frac{\partial u}{\partial x^k}(t, \bar{X}_t) - \lambda(t, \bar{X}_t) u(t, \bar{X}_t) + f(t, \bar{X}_t) \right\}. \end{aligned}$$

$$B_t^{(i)} := \Lambda_t \left\{ \sum_{k=1}^n b^{(k,i)}(t, \bar{X}_t) \frac{\partial u}{\partial x^k}(t, \bar{X}_t) \right\}.$$

Nach Konstruktion gilt:

$$dU_t = A_t dt + \sum_{i=1}^p B_t^{(i)} dW_t^{(i)}.$$

Wir definieren einen stochastischen Prozess V durch:

$$V_t := U_t - \int_0^t A_s ds = U_0 + \sum_{i=1}^p \int_0^t B_s^{(i)} dW_s^{(i)}.$$

Nach Konstruktion ist $U_0 \in \mathbb{R}$ und $B^{(i)} \in \mathfrak{L}^2$. Nach der Itoschen Isometrie ist $V \in \mathfrak{M}$. Insbesondere ist V ein Martingal.

(a) Nach der partiellen Differentialgleichung für u gilt:

$$A_t = 0.$$

Also ist $U = V \in \mathfrak{M}$. Insbesondere ist U ein Martingal. Daraus folgt:

$$E_P[U_0] = E_P[U_T].$$

Nach Konstruktion gilt:

$$U_0 = u(0, \bar{X}_0) = u(0, \bar{z}).$$

$$U_T = \Lambda_T u(T, \bar{X}_T) + \Phi_T = \Lambda_T v(\bar{X}_T) + \Phi_T.$$

Daraus folgt die Behauptung.

(b) Nach der partiellen Differentialgleichung für u gilt:

$$\forall 0 \leq t < \tau^{(\bar{X}, G)} \wedge T:$$

$$A_t = 0.$$

Daraus folgt:

$$V_{\tau^{(\bar{X}, G)} \wedge T} = U_{\tau^{(\bar{X}, G)} \wedge T} - \int_0^{\tau^{(\bar{X}, G)} \wedge T} A_s ds = U_{\tau^{(\bar{X}, G)} \wedge T}.$$

Mit Hilfe des Satzes von Doob über Optional Sampling erhalten wir:

$$\begin{aligned} E_P[U_0] &= E_P[V_0] \\ &= E_P[V_{\tau^{(\bar{X}, G)} \wedge T}] \\ &= E_P[U_{\tau^{(\bar{X}, G)} \wedge T}] \\ &= E_P[1_{\{\tau^{(\bar{X}, G)} = \infty\}} U_T] + E_P[1_{\{\tau^{(\bar{X}, G)} \in I\}} U_{\tau^{(\bar{X}, G)}}]. \end{aligned}$$

Nach Konstruktion gilt:

$$U_0 = u(0, \bar{X}_0) = u(0, \bar{z}).$$

$$U_T = \Lambda_T u(T, \bar{X}_T) + \Phi_T = \Lambda_T v(\bar{X}_T) + \Phi_T.$$

$$\begin{aligned} 1_{\{\tau^{(\bar{X}, G)} \in I\}} U_{\tau^{(\bar{X}, G)}} &= 1_{\{\tau^{(\bar{X}, G)} \in I\}} (\Lambda_{\tau^{(\bar{X}, G)}} u(\tau^{(\bar{X}, G)}, \bar{X}_{\tau^{(\bar{X}, G)}}) + \Phi_{\tau^{(\bar{X}, G)}}) \\ &= 1_{\{\tau^{(\bar{X}, G)} \in I\}} \Phi_{\tau^{(\bar{X}, G)}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

(c) 1. Nach Konstruktion gilt:

$$U_{\bar{\tau}} = \Lambda_{\bar{\tau}} u(\bar{\tau}, \bar{X}_{\bar{\tau}}) + \Phi_{\bar{\tau}} = \Lambda_{\bar{\tau}} v(\bar{X}_{\bar{\tau}}) + \Phi_{\bar{\tau}}.$$

Nach den beiden Inklusionen für u gilt:

$\forall 0 \leq t < \bar{\tau}$:

$$u(t, \bar{X}_t) > v(\bar{X}_t) \implies A_t = 0$$

Daraus folgt:

$$V_{\bar{\tau}} = U_{\bar{\tau}} - \int_0^{\bar{\tau}} A_s ds = U_{\bar{\tau}}.$$

Mit Hilfe des Satzes von Doob über Optional Sampling erhalten wir:

$$E_P[U_0] = E_P[V_0] = E_P[V_{\bar{\tau}}] = E_P[U_{\bar{\tau}}] = E_P[\Lambda_{\bar{\tau}} v(\bar{X}_{\bar{\tau}}) + \Phi_{\bar{\tau}}].$$

2. Sei τ eine Stoppzeit mit $\tau \in I$. Nach der ersten Inklusion für u gilt:

$$A_t \leq 0.$$

Daraus folgt:

$$V_t = U_t - \int_0^t A_s ds \geq U_t.$$

Mit Hilfe des Satzes von Doob über Optional Sampling erhalten wir:

$$E_P[U_0] = E_P[V_0] = E_P[V_{\tau}] \geq E_P[U_{\tau}].$$

Nach der zweiten Inklusion für u gilt:

$$U_t = \Lambda_t u(t, \bar{X}_t) + \Phi_t \geq \Lambda_t v(\bar{X}_t) + \Phi_t.$$

Daraus folgt:

$$E_P[U_0] \geq E_P[U_{\tau}] \geq E_Q[\Lambda_{\tau} v(\bar{X}_{\tau}) + \Phi_{\tau}].$$

Dabei war τ beliebig. Daraus folgt:

$$E_P[U_0] \geq \sup \{ E_Q[\Lambda_{\tau} v(\bar{X}_{\tau}) + \Phi_{\tau}] \mid \tau \text{ ist Stoppzeit mit } \tau \in I \}.$$

3. Nach Punkt 1 und Punkt 2 gilt:

$$\begin{aligned} E_P[U_0] &= E_P[\Lambda_{\bar{\tau}} v(\bar{X}_{\bar{\tau}}) + \Phi_{\bar{\tau}}] \\ &= \sup \{ E_Q[\Lambda_{\tau} v(\bar{X}_{\tau}) + \Phi_{\tau}] \mid \tau \text{ ist Stoppzeit mit } \tau \in I \}. \end{aligned}$$

Nach Konstruktion gilt:

$$U_0 = u(0, \bar{X}_0) = u(0, \bar{z}).$$

Daraus folgt die Behauptung.

□

2.9 Brownsche Martingale

Voraussetzung

- Sei $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ die von $W^{(1)}, \dots, W^{(p)}$ erzeugte Brownsche Filtration.

Theorem 2.16 (Satz über monotone Klassen)

Sei \mathcal{A} ein System von Teilmengen von Ω , sei \mathfrak{U} eine Menge von Funktionen $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, und seien zusätzlich folgende Voraussetzungen gegeben:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$.
3. \mathfrak{U} ist ein Vektorraum.
4. $A \in \mathcal{A} \implies 1_A \in \mathfrak{U}$.
5. Es gilt folgende Implikation:

$(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine monoton wachsende Folge in \mathfrak{U} , welche punktweise gegen eine beschränkte Funktionen $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert.

\implies

$Z \in \mathfrak{U}$.

Dann gilt folgende Implikation:

$Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt und $\sigma(\mathcal{A})/\mathfrak{B}$ -messbar $\implies Z \in \mathfrak{U}$.

Literaturhinweise

1. Siehe [19], Theorem 12.8, S.209.
2. Siehe [21], Theorem 3.14, S.37.

Notation

1. Seien $x^1, \dots, x^p \in \mathbb{R}$. Wir schreiben:

$$\tilde{x} := (x^1, \dots, x^p).$$

2. Seien $X^{(1)}, \dots, X^{(p)}$ stochastische Prozesse. Wir schreiben:

$$\tilde{X}_t := (X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(p)}).$$

Theorem 2.17

Sei \mathfrak{U} die Menge von Funktionen $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mit folgender Darstellung:

$\exists 0 = t_0 < \dots < t_n \in I \exists \lambda^{(1,1)}, \dots, \lambda^{(n,p)} \in \mathbb{R}$:

$$Z(\omega) = \exp \left(i \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda^{(k,j)} (W_{t_k}^{(j)}(\omega) - W_{t_{k-1}}^{(j)}(\omega)) \right).$$

Dann gilt:

$\text{span}(\mathfrak{U})$ liegt dicht in $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$.

Literaturhinweise

Siehe [19], Lemma 12.1, S.201.

Beweis

1. Sei \mathcal{A} das System von Teilmengen von $A \subset \Omega$ mit folgender Darstellung:

$\exists 0 < t_1 < \dots < t_n \in I \exists x^{(0,1)}, \dots, x^{(n,p)} \in \mathbb{R}$:

$$A = \bigcap_{k=1}^n \bigcap_{j=1}^p (W_{t_k}^{(j)})^{-1}((-\infty, x^{(k,j)})).$$

Nach Konstruktion gilt:

- i. $\Omega \in \mathcal{A}$.
- ii. $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$.

2. Nach Konstruktion gilt:

\mathcal{F}_T ist die Vervollständigung von $\sigma(\mathcal{A})$.

Ferner gilt für jede σ -Algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$:

Die Menge der Treppenfunktionen liegt dicht in $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$.

Deshalb genügt es, folgende Aussage zu beweisen:

$\text{span}(\mathfrak{U})$ liegt dicht in $L^2(\Omega, \sigma(\mathcal{A}), P)$.

3. Sei \mathfrak{V} die Menge von Funktionen $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mit folgender Darstellung:

$\exists 0 < t_1 < \dots < t_n \in I \exists$ beschränktes Borel-messbares $v : \mathbb{R}^{n \times p} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$Z(\omega) = v(\tilde{W}_{t_1}(\omega), \dots, \tilde{W}_{t_n}(\omega)).$$

Sei ferner \mathfrak{W}_0 die Menge von Funktionen $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mit folgender Eigenschaft:

Z ist beschränkt, und es gibt eine monoton wachsende Folge $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{W} , welche punktweise gegen Z konvergiert.

Sei schließlich $\mathfrak{W} := \text{span}(\mathfrak{W}_0)$. Nach Konstruktion gilt:

iii. \mathfrak{W} ist ein Vektorraum.

iv. $A \in \mathcal{A} \implies 1_A \in \mathfrak{W}$.

v. Es gilt folgende Implikation:

$(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine monoton wachsende Folge in \mathfrak{W} , welche punktweise gegen eine beschränkte Funktionen $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert.

\implies

$Z \in \mathfrak{W}$.

Nach dem Satz über monotone Klassen gilt folgende Implikation:

$Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt und $\sigma(\mathcal{A})/\mathfrak{B}$ -messbar $\implies Z \in \mathfrak{W}$.

Daraus folgt:

\mathfrak{W} liegt dicht in $L^2(\Omega, \sigma(\mathcal{A}), P)$.

Nach dem Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz gilt:

\mathfrak{W} liegt dicht in \mathfrak{W} .

Deshalb genügt es, folgende Aussage zu beweisen:

$\text{span}(\mathfrak{U})$ liegt dicht in \mathfrak{W} .

4. Wir verwenden folgende Notation:

$$\Theta := \{\theta = (t_1, \dots, t_n) \mid 0 < t_1 < \dots < t_n \in I\}.$$

Seien $\mathfrak{U}_\theta \subset \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{W}_\theta \subset \mathfrak{W}$ die Teilmengen, welche genau jene Funktionen Z enthalten, deren Darstellung bzgl. θ gegeben ist. Nach Konstruktion gilt:

$$\text{span}(\mathfrak{U}) = \bigcup_{\theta \in \Theta} \text{span}(\mathfrak{U}_\theta).$$

$$\mathfrak{W} = \bigcup_{\theta \in \Theta} \mathfrak{W}_\theta.$$

Deshalb genügt es, folgende Aussage zu beweisen:

$\text{span}(\mathfrak{U}_\theta)$ liegt dicht in \mathfrak{W}_θ .

5. Bezeichne $\overline{\mathfrak{M}}_\theta$ den Abschluss von \mathfrak{M}_θ in $L^2(\Omega, \sigma(\mathcal{A}), P)$. Nach Punkt 4 genügt es, folgende Aussage zu beweisen:

$$\overline{\mathfrak{M}}_\theta \cap (\text{span}(\mathfrak{U}_\theta))^\perp = \{0\}.$$

Sei dazu $Z \in \overline{\mathfrak{M}}_\theta \cap (\text{span}(\mathfrak{U}_\theta))^\perp$. Nach Konstruktion gibt es eine Borel-messbare (jedoch nicht notwendigerweise beschränkte) Funktion $v : \mathbb{R}^{n \times p} \rightarrow \mathbb{C}$ mit folgender Eigenschaft:

$$Z(\omega) = v(\tilde{W}_{t_1}(\omega), \dots, \tilde{W}_{t_n}(\omega)).$$

Wir definieren $f : \mathbb{R}^{n \times p} \rightarrow \mathbb{C}$ durch:

$$v(\tilde{x}^{(1)}, \dots, \tilde{x}^{(n)}) = f(\tilde{x}^{(1)} - 0, \tilde{x}^{(2)} - \tilde{x}^{(1)}, \dots, \tilde{x}^{(n)} - \tilde{x}^{(n-1)}).$$

Bezeichne $\rho > 0$ die Dichte von $(\tilde{W}_{t_1} - \tilde{W}_{t_0}, \dots, \tilde{W}_{t_n} - \tilde{W}_{t_{n-1}})$. Nach Konstruktion gilt:

$$\forall \lambda^{(1,1)}, \dots, \lambda^{(n,p)} \in \mathbb{R}:$$

$$\begin{aligned} 0 &= E_P \left[Z \exp \left(i \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda^{(k,j)} (W_{t_k}^{(j)} - W_{t_{k-1}}^{(j)}) \right) \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n \times p}} f(x) \exp \left(i \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda^{(k,j)} x^{(k,j)} \right) \rho(x) dx. \end{aligned}$$

Nach der Theorie der Fourier-Transformation folgt daraus:

$$f = 0 \quad (\text{fast überall in } \mathbb{R}^{n \times p}).$$

Also ist $Z = 0$. Damit ist das Theorem bewiesen.

□

Theorem 2.18 (Darstellungssatz für Brownsche Martingale)

Sei $X \in \mathfrak{M}$. Dann gilt:

\exists eindeutig bestimmte $B^{(1)}, \dots, B^{(p)} \in \mathfrak{L}^2$ mit folgender Eigenschaft:

$$X_t = X_0 + \sum_{j=1}^p \int_0^t B_s^{(j)} dW_s^{(j)} \quad (\text{fast sicher}).$$

Literaturhinweise

1. Siehe [19], Theorem 12.3, S.197.

2. Siehe [14], Theorem 2.68, S.71.

Beweis

1. Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit der Darstellung. Seien dazu $B^{(1,1)}, \dots, B^{(1,p)}, B^{(2,1)}, \dots, B^{(2,p)} \in \mathfrak{L}^2$ mit folgender Eigenschaft:

$$\sum_{j=1}^p \int_0^T B_s^{(1,j)} dW_s^{(j)} = \sum_{j=1}^p \int_0^T B_s^{(2,j)} dW_s^{(j)} \quad (\text{fast sicher}).$$

Nach den Orthogonalitätsrelationen und der Itoschen Isometrie gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= E_P \left[\left| \sum_{j=1}^p \int_0^T (B_s^{(2,j)} - B_s^{(1,j)}) dW_s^{(j)} \right|^2 \right] \\ &= \sum_{j=1}^p E_P \left[\left| \int_0^T (B_s^{(2,j)} - B_s^{(1,j)}) dW_s^{(j)} \right|^2 \right] \\ &= \sum_{j=1}^p E_P \left[\int_0^T |B_s^{(2,j)} - B_s^{(1,j)}|^2 ds \right]. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$B^{(1,1)} = B^{(2,1)}; \dots; B^{(1,p)} = B^{(2,p)}.$$

Damit ist die Eindeutigkeit der Darstellung bewiesen.

2. Nach Voraussetzung ist $X \in \mathfrak{M}$. Nach Definition der Norm $\|\cdot\|_{\mathfrak{M}}$ genügt es, die Existenz der Darstellung für X_T zu beweisen.

3. Nach Voraussetzung ist $X_T \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$. Nach Theorem 2.17 gibt es eine Folge $(Z^{(\nu)})_{\nu \in \mathbb{N}}$ in $\text{span}(\mathfrak{U})$ mit folgender Eigenschaft:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|X_T - Z^{(\nu)}\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

4. Sei $Z \in \mathfrak{U}$ mit folgender Darstellung:

$$Z(\omega) = \exp \left(i \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda^{(k,j)} (W_{t_k}^{(j)}(\omega) - W_{t_{k-1}}^{(j)}(\omega)) \right).$$

Wir definieren $\Lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(p)} \in \mathfrak{S}$ durch:

$$\Lambda_t^{(j)}(\omega) = \sum_{k=1}^n 1_{(t_{k-1}, t_k]}(t) \lambda^{(k,j)}.$$

Nach Konstruktion gilt:

$$Z = \exp \left(i \sum_{j=1}^p \int_0^T \Lambda_t^{(j)} dW_t^{(j)} \right).$$

Nach der Itoschen Formel gilt:

$$\begin{aligned} Z &= 1 + i \sum_{j=1}^p \int_0^T \Lambda_t^{(j)} \exp \left(i \sum_{j=1}^p \int_0^t \Lambda_s^{(j)} dW_s^{(j)} \right) dW_t^{(j)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \int_0^T |\Lambda_t^{(j)}|^2 \exp \left(i \sum_{j=1}^p \int_0^t \Lambda_s^{(j)} dW_s^{(j)} \right) dt \end{aligned}$$

(fast sicher).

Daraus folgt:

$$Z = E_P[Z] + i \sum_{j=1}^p \int_0^T \Lambda_t^{(j)} \exp \left(i \sum_{j=1}^p \int_0^t \Lambda_s^{(j)} dW_s^{(j)} \right) dW_t^{(j)} \quad (\text{fast sicher}).$$

Dabei war $Z \in \mathfrak{U}$ beliebig. Insbesondere gilt:

$\exists B^{(\nu,1)}, \dots, B^{(\nu,p)} \in \mathfrak{L}^2$:

$$Z^{(\nu)} = E_P[Z^{(\nu)}] + \sum_{j=1}^p \int_0^T B_t^{(\nu,j)} dW_t^{(\nu,j)} \quad (\text{fast sicher}).$$

5. Nach Punkt 3 und eventuellem Übergang zu einer Teilfolge von $(Z^{(\nu)})_{\nu \in \mathbb{N}}$ gilt:

$$Z^{(\nu)} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} X_T \quad (\text{fast sicher}).$$

$$E_P[Z^{(\nu)}] \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} E_P[X_T] = X_0.$$

Ebenfalls nach Punkt 3 ist $(Z^{(\nu)} - E_P[Z^{(\nu)}])_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\Omega)$. Nach Punkt 4 sowie den Orthogonalitätsrelationen und der Itoschen Isometrie ist $(B^{(\nu,j)})_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathfrak{L}^2 . Daraus folgt:

$$B^{(\nu,j)} \xrightarrow[\mathfrak{L}^2]{\nu \rightarrow \infty} B^{(j)}.$$

Nach der Itoschen Isometrie folgt daraus:

$$I[B^{(\nu,j)}] \xrightarrow[\mathfrak{M}]{\nu \rightarrow \infty} I[B^{(j)}].$$

Daraus folgt insgesamt:

$$\begin{aligned}
X_T &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} Z^{(\nu)} \\
&= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left(E_P[Z^{(\nu)}] + \sum_{j=1}^p \int_0^T B_t^{(\nu,j)} dW_t^{(\nu,j)} \right) \\
&= X_0 + \sum_{j=1}^p \int_0^T B_t^{(j)} dW_t^{(\nu,j)} \\
&\text{(fast sicher).}
\end{aligned}$$

Damit ist das Theorem bewiesen.

□

2.10 Wechsel des Wahrscheinlichkeitsmaßes

Voraussetzung

- Sei $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ die von $W^{(1)}, \dots, W^{(p)}$ erzeugte Brownsche Filtration.

Definition

Sei $\bar{Z} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Zufallsvariable (d.h. $\mathcal{F}/\mathcal{B}^n$ -messbar).

- (a) Wir definieren ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P_{\bar{Z}} : \mathcal{B}^n \rightarrow [0, 1]$ durch:

$$P_{\bar{Z}}(A) := P(Z^{-1}(A)).$$

$P_{\bar{Z}}$ heisst das von \bar{Z} erzeugte Wahrscheinlichkeitsmaß.

- (b) Wir definieren eine Funktion $\varphi_{\bar{Z}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ durch:

$$\varphi_{\bar{Z}}(\bar{\lambda}) := E_P[\exp(i \langle \bar{\lambda} | \bar{Z} \rangle)] = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i \langle \bar{\lambda} | \bar{z} \rangle) dP_{\bar{Z}}(z).$$

$\varphi_{\bar{Z}}$ heisst *charakteristische Funktion* von \bar{Z} .

Theorem 2.19

Seien $\bar{Z}^{(1)}, \bar{Z}^{(2)} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ Zufallsvariablen (d.h. $\mathcal{F}/\mathcal{B}^n$ -messbar).

Dann gilt folgende Implikation:

$$\varphi_{\bar{Z}^{(1)}} = \varphi_{\bar{Z}^{(2)}} \implies P_{\bar{Z}^{(1)}} = P_{\bar{Z}^{(2)}}.$$

Literaturhinweis

Siehe [3], Theorem 23.4, S.199.

Theorem 2.20 (Satz von Girsanov)

Seien $B^{(1)}, \dots, B^{(p)} \in \mathfrak{L}^2$ beschränkt.

(a) Wir definieren einen stochastischen Prozess Φ durch:

$$\Phi_t := \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \int_0^t |B_s^{(j)}|^2 ds - \sum_{j=1}^p \int_0^t B_s^{(j)} dW_s^{(j)} \right).$$

Damit gilt:

$$\Phi \in \mathfrak{M}.$$

(b) Wir definieren eine Abbildung $Q : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$Q(A) := E_P[1_A \Phi_T].$$

Damit gilt:

Q ist ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß.

(c) Wir definieren stochastische Prozesse $V^{(1)}, \dots, V^{(p)}$ durch:

$$V_t^{(j)} := \int_0^t B_s^{(j)} ds + W_t^{(j)}.$$

Damit gilt:

$V^{(1)}, \dots, V^{(p)}$ sind unabhängige Brownsche Bewegungen bzgl. Q .

(d) Sei X ein Itoscher Prozess bzgl. P mit folgender Darstellung:

$$X_t = Z + \int_0^t \alpha_s ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t \beta_s^{(i)} B_s^{(i)} ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t \beta_s^{(i)} dW_s^{(i)} \quad (\text{fast sicher}).$$

Dann gilt:

X ist ein Itoscher Prozess bzgl. Q mit folgender Darstellung:

$$X_t = Z + \int_0^t \alpha_s ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t \beta_s^{(i)} dV_s^{(i)} \quad (\text{fast sicher}).$$

Literaturhinweise

1. Siehe [19], Theorem 13.2, S.222.
2. Siehe [14], Theorem 3.11, S.94.

Beweis

(a) Nach der Itoschen Formel gilt:

$$\Phi_t = 1 - \sum_{j=1}^p \int_0^t \Phi_s B_s^{(j)} dW_s^{(j)} \quad (\text{fast sicher}).$$

Wir definieren Stoppzeiten $\tau^{(\nu)}, \tau^{(\nu,1)}, \dots, \tau^{(\nu,p)}$ durch:

$$\tau^{(\nu,j)} := T \wedge \inf \left\{ t \in I \mid \int_0^t |\Phi_s|^2 |B_s^{(j)}|^2 ds \geq \nu \right\}.$$

$$\tau^{(\nu)} := \tau^{(\nu,1)} \wedge \dots \wedge \tau^{(\nu,p)}.$$

Nach Konstruktion gilt:

$$\tau^{(\nu)} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} T \quad (\text{fast sicher}).$$

Mit Hilfe von Theorem 2.8, Theorem 2.9 und Theorem 2.10 erhalten wir:

$$1_{\{t \leq \tau^{(\nu)}\}} \Phi_t = 1_{\{t \leq \tau^{(\nu)}\}} \left(1 - \sum_{j=1}^p \int_0^t 1_{\{s \leq \tau^{(\nu)}\}} \Phi_s B_s^{(j)} dW_s^{(j)} \right) \quad (\text{fast sicher}).$$

Mit Hilfe der Itoschen Isometrie, der Beschränktheit der $B^{(j)}$ sowie des Satzes von Fubini erhalten wir für eine geeignete Konstante $K > 0$:

$$\begin{aligned} & E_P[|1_{\{t \leq \tau^{(\nu)}\}} \Phi_t|^2] \\ & \leq (p+1) \left(1 + \sum_{j=1}^p E_P \left[\int_0^t 1_{\{s \leq \tau^{(\nu)}\}} |\Phi_s|^2 |B_s^{(j)}|^2 ds \right] \right) \\ & \leq K \left(1 + \int_0^t E_P[|1_{\{s \leq \tau^{(\nu)}\}} \Phi_s|^2] ds \right). \end{aligned}$$

Nach dem Lemma von Gronwall folgt daraus:

$$E_P[|1_{\{t \leq \tau^{(\nu)}\}} \Phi_t|^2] \leq K \exp(K t).$$

Nach Lemma von Fatou folgt daraus:

$$E_P[|\Phi_t|^2] \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} E_P[|1_{\{t \leq \tau^{(\nu)}\}} \Phi_t|^2] \leq K \exp(K t).$$

Insbesondere ist $\Phi \in \mathfrak{L}^2$. Also ist $\Phi B^{(j)} \in \mathfrak{L}^2$. Nach der obigen Darstellungsformel ist $\Phi \in \mathfrak{M}$.

(b) Nach Konstruktion ist Q ein äquivalentes Maß auf Ω . Nach (a) ist Φ ein Martingal. Daraus folgt:

$$Q(\Omega) = E_P[\Phi_T] = E_P[\Phi_0] = 1.$$

Also ist Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

(c) Nach Konstruktion gilt:

1. $V^{(j)}$ ist adaptiert bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$.
2. $V^{(j)}$ hat stetige Pfade (fast sicher).
3. $V_0^{(j)} = 0$ (fast sicher).

Deshalb genügt es, folgende Aussagen zu beweisen:

4. $\forall t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2$:
 $V_{t_2} - V_{t_1}$ ist $(0, t_2 - t_1)$ -Normal-verteilt.
5. $\forall t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2$:
 $V_{t_2} - V_{t_1}$ ist unabhängig von \mathcal{F}_{t_1} bzgl. Q .
6. $V^{(1)}, \dots, V^{(p)}$ sind unabhängige stochastische Prozesse bzgl. Q .

Nach Konstruktion gilt:

$(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ ist genau die von $V^{(1)}, \dots, V^{(p)}$ erzeugte Filtration.

Deshalb genügt es, folgende Aussage zu beweisen:

$\forall t_0, \dots, t_n \in I$ mit $0 = t_0 < \dots < t_n = T$:

$$Q_{(V_{t_1}^{(1)} - V_{t_0}^{(1)}, \dots, V_{t_n}^{(p)} - V_{t_{n-1}}^{(p)})} = P_{(W_{t_1}^{(1)} - W_{t_0}^{(1)}, \dots, W_{t_n}^{(p)} - W_{t_{n-1}}^{(p)})}.$$

Seien dazu $t_0, \dots, t_n \in I$ mit $0 = t_0 < \dots < t_n = T$, und seien $\lambda^{(1,1)}, \dots, \lambda^{(n,p)} \in \mathbb{R}$. Wir definieren deterministische beschränkte Prozesse $\Lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(p)} \in \mathcal{L}^2$ durch:

$$\Lambda_t^{(j)} := \sum_{k=1}^n \lambda^{(k,j)} 1_{(t_{k-1}, t_k]}(t).$$

Wir definieren ferner einen stochastischen Prozess Ψ durch:

$$\Psi_t := \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \int_0^T (B_t^{(j)} - i \Lambda_t^{(j)})^2 dt - \sum_{j=1}^p \int_0^T (B_t^{(j)} - i \Lambda_t^{(j)}) dW_t^{(j)} \right).$$

Nach Konstruktion gilt:

$$\varphi_{(V_{t_1}^{(1)} - V_{t_0}^{(1)}, \dots, V_{t_n}^{(p)} - V_{t_{n-1}}^{(p)})}^Q(\lambda^{(1,1)}, \dots, \lambda^{(n,p)})$$

$$\begin{aligned}
&= E_Q \left[\exp \left(i \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda^{(k,j)} (V_{t_k}^{(j)} - V_{t_{k-1}}^{(j)}) \right) \right] \\
&= E_P \left[\exp \left(i \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda^{(k,j)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} B_t^{(j)} dt + i \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda^{(k,j)} (W_{t_k}^{(j)} - W_{t_{k-1}}^{(j)}) \right) \Phi_T \right] \\
&= E_P \left[\exp \left(i \sum_{j=1}^p \int_0^T \Lambda_t^{(j)} B_t^{(j)} dt + i \sum_{j=1}^p \int_0^T \Lambda_t^{(j)} dW_t^{(j)} \right) \Phi_T \right] \\
&= E_P \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \int_0^T (|B_t^{(j)}|^2 - 2i \Lambda_t^{(j)} B_t^{(j)}) dt - \sum_{j=1}^p \int_0^T (B_t^{(j)} - i \Lambda_t^{(j)}) dW_t^{(j)} \right) \right] \\
&= \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \int_0^T |\Lambda_t^{(j)}|^2 dt \right) E_P[\Psi_T] \\
&= \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^p |\lambda^{(k,j)}|^2 (t_k - t_{k-1}) \right) E_P[\Psi_T].
\end{aligned}$$

Wie in (a) und (b) erhalten wir:

$$E_P[\Psi_T] = E_P[\Psi_0] = 1.$$

Daraus folgt:

$$\varphi_{(V_{t_1}^{(1)} - V_{t_0}^{(1)}, \dots, V_{t_n}^{(p)} - V_{t_{n-1}}^{(p)})}^Q(\lambda^{(1,1)}, \dots, \lambda^{(n,p)}) = \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^p |\lambda^{(k,j)}|^2 (t_k - t_{k-1}) \right).$$

Für $B^{(1)} = \dots = B^{(p)} = 0$ erhalten wir insbesondere:

$$\varphi_{(W_{t_1}^{(1)} - W_{t_0}^{(1)}, \dots, W_{t_n}^{(p)} - W_{t_{n-1}}^{(p)})}^P(\lambda^{(1,1)}, \dots, \lambda^{(n,p)}) = \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^p |\lambda^{(k,j)}|^2 (t_k - t_{k-1}) \right).$$

Dabei waren $\lambda^{(1,1)}, \dots, \lambda^{(n,p)} \in \mathbb{R}$ beliebig. Nach Theorem 2.19 folgt daraus:

$$Q_{(V_{t_1}^{(1)} - V_{t_0}^{(1)}, \dots, V_{t_n}^{(p)} - V_{t_{n-1}}^{(p)})} = P_{(W_{t_1}^{(1)} - W_{t_0}^{(1)}, \dots, W_{t_n}^{(p)} - W_{t_{n-1}}^{(p)})}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

(d) Wir definieren eine Folge $(\tau^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ von Stoppzeiten durch:

$$\begin{aligned}
\tau^{(n)}(\omega) &:= T \wedge \inf \left\{ t \in [0, T] \mid \int_0^t |\beta_s^{(1)}(\omega)|^2 ds \geq n \right\} \wedge \dots \\
&\dots \wedge \inf \left\{ t \in [0, T] \mid \int_0^t |\beta_s^{(p)}(\omega)|^2 ds \geq n \right\}.
\end{aligned}$$

Nach Konstruktion gilt:

$$\tau^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T \quad (\text{fast sicher}).$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned} & 1_{\{t \leq \tau^{(n)}\}} X_{t \wedge \tau^{(n)}} \\ &= 1_{\{t \leq \tau^{(n)}\}} Z + \int_0^{t \wedge \tau^{(n)}} 1_{\{s \leq \tau^{(n)}\}} \alpha_s \, ds + \sum_{i=1}^p \int_0^{t \wedge \tau^{(n)}} 1_{\{s \leq \tau^{(n)}\}} \beta_s^{(i)} B_s^{(i)} \, ds \\ & \quad + \sum_{i=1}^p \int_0^{t \wedge \tau^{(n)}} 1_{\{s \leq \tau^{(n)}\}} \beta_s^{(i)} \, dW_s^{(i)} \quad (\text{fast sicher}). \end{aligned}$$

Dabei sind die Itoschen Integrale bzgl. P definiert. Wir definieren stochastische Prozesse $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(p)} \in \mathfrak{L}^2(P) \cap \mathfrak{L}^2(Q)$ durch:

$$\gamma_t^{(i)} := 1_{\{t \leq \tau^{(n)}\}} \beta_t^{(i)}.$$

Nach dem Beweis von Theorem 2.7 gibt es Folgen $(\gamma^{(1,\nu)})_{\nu \in \mathbb{N}}, \dots, (\gamma^{(p,\nu)})_{\nu \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{S} mit folgenden Eigenschaften:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|\gamma^{(i)} - \gamma^{(i,\nu)}\|_{\mathfrak{L}^2(P)} = 0.$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|\gamma^{(i)} - \gamma^{(i,\nu)}\|_{\mathfrak{L}^2(Q)} = 0.$$

Nach der Itoschen Isometrie gilt nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge:

$$\begin{aligned} & 1_{\{t \leq \tau^{(n)}\}} X_{t \wedge \tau^{(n)}} \\ &= 1_{\{t \leq \tau^{(n)}\}} Z + \int_0^{t \wedge \tau^{(n)}} 1_{\{s \leq \tau^{(n)}\}} \alpha_s \, ds + \sum_{i=1}^p \int_0^{t \wedge \tau^{(n)}} \gamma_s^{(i)} B_s^{(i)} \, ds \\ & \quad + \sum_{i=1}^p \int_0^{t \wedge \tau^{(n)}} \gamma_s^{(i)} \, dW_s^{(i)} \\ &= 1_{\{t \leq \tau^{(n)}\}} Z + \int_0^{t \wedge \tau^{(n)}} 1_{\{s \leq \tau^{(n)}\}} \alpha_s \, ds \\ & \quad + \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^p \int_0^{t \wedge \tau^{(n)}} \gamma_s^{(i,\nu)} B_s^{(i)} \, ds + \sum_{i=1}^p \int_0^{t \wedge \tau^{(n)}} \gamma_s^{(i,\nu)} \, dW_s^{(i)} \right) \\ & \quad (\text{fast sicher}). \end{aligned}$$

Dabei sind die Itoschen Integrale bzgl. P definiert. Nach Konstruktion gilt:

$$\sum_{i=1}^p \int_0^{t \wedge \tau^{(n)}} \gamma_s^{(i, \nu)} B_s^{(i)} ds + \sum_{i=1}^p \int_0^{t \wedge \tau^{(n)}} \gamma_s^{(i, \nu)} dW_s^{(i)} = \sum_{i=1}^p \int_0^{t \wedge \tau^{(n)}} \gamma_s^{(i, \nu)} dV_s^{(i)}.$$

Dabei sind die Itoschen Integrale bzgl. P und Q gleichermaßen definiert. Nach der Itoschen Isometrie gilt nach eventuellem Übergang zu einer weiteren Teilfolge:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^p \int_0^{t \wedge \tau^{(n)}} \gamma_s^{(i, \nu)} dV_s^{(i)} = \sum_{i=1}^p \int_0^{t \wedge \tau^{(n)}} \gamma_s^{(i)} dV_s^{(i)} \quad (\text{fast sicher}).$$

Dabei sind die Itoschen Integrale bzgl. Q definiert. Daraus folgt insgesamt:

$$\begin{aligned} & 1_{\{t \leq \tau^{(n)}\}} X_{t \wedge \tau^{(n)}} \\ &= 1_{\{t \leq \tau^{(n)}\}} Z + \int_0^{t \wedge \tau^{(n)}} 1_{\{s \leq \tau^{(n)}\}} \alpha_s ds + \sum_{i=1}^p \int_0^{t \wedge \tau^{(n)}} \gamma_s^{(i)} dV_s^{(i)} \\ &= 1_{\{t \leq \tau^{(n)}\}} Z + \int_0^{t \wedge \tau^{(n)}} 1_{\{s \leq \tau^{(n)}\}} \alpha_s ds + \sum_{i=1}^p \int_0^{t \wedge \tau^{(n)}} 1_{\{s \leq \tau^{(n)}\}} \beta_s^{(i)} dV_s^{(i)} \end{aligned}$$

(fast sicher).

Dabei sind die Itoschen Integrale bzgl. Q definiert. Daraus folgt schließlich:

$$X_t = Z + \int_0^t \alpha_s ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t \beta_s^{(i)} dV_s^{(i)} \quad (\text{fast sicher}).$$

Dabei sind die Itoschen Integrale bzgl. Q definiert. Damit ist die Behauptung bewiesen.

□

3 Finanzmärkte

3.1 Modellierung von Aktienmärkten

Zeit

Wir betrachten das folgende Zeitintervall:

$$I := [0, T].$$

Dabei bezeichnet $t = 0$ die Gegenwart und $t > 0$ zukünftige Zeitpunkte.

Ereignisraum

1. Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum Ω .
2. Wir betrachten eine σ -Algebra $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}[\Omega]$.
3. Wir betrachten ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$.
4. Wir betrachten eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ mit $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$.

Brownsche Bewegungen

1. Wir betrachten unabhängige Brownsche Bewegungen $W^{(1)}, \dots, W^{(p)}$.
2. Wir nehmen an, dass $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ von den $W^{(1)}, \dots, W^{(p)}$ erzeugt wird.

Nach Konstruktion gilt:

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}.$$

Insbesondere ist jede $\mathcal{F}_0/\mathcal{B}$ -messbare Zufallsvariable konstant.

Notation

1. Seien $x^1, \dots, x^p \in \mathbb{R}$. Wir schreiben:

$$\tilde{x} := (x^1, \dots, x^p).$$

2. Seien $X^{(1)}, \dots, X^{(p)}$ stochastische Prozesse. Wir schreiben:

$$\tilde{X}_t := (X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(p)}).$$

Geldkontoprozess

Wir betrachten einen positiven Geldkontoprozess $S^{(0)}$. $S^{(0)}$ beschreibt die Wertentwicklung einer Geldeinheit, welche zur Zeit $t = 0$ in ein Geldkonto investiert wird. Sei dazu $r \in \mathfrak{C}$ beschränkt. Wir nehmen an, dass $S^{(0)}$ folgende Darstellung besitzt:

$$S_t^{(0)} = 1 + \int_0^t r_s S_s^{(0)} ds.$$

Dabei bezeichnet r die *Zinsrate*. Nach dem Itoschen Lemma gilt:

$$S_t^{(0)} = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right).$$

Insbesondere ist $S^{(0)} \in \mathfrak{C}$ beschränkt.

Aktienpreisprozesse

Wir betrachten Aktienpreisprozesse $S^{(1)}, \dots, S^{(p)}$. $S^{(i)}$ beschreibt die Wertentwicklung einer Geldeinheit, welche zur Zeit $t = 0$ in eine Aktie investiert wird. Seien dazu $\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(p)}, \sigma^{(1,1)}, \dots, \sigma^{(p,p)} \in \mathfrak{C}$ beschränkt. Wir nehmen an, dass $S^{(i)}$ folgende Darstellung besitzt:

$$S_t^{(i)} = 1 + \int_0^t \mu_s^{(i)} S_s^{(i)} ds + \sum_{j=1}^p \int_0^t \sigma_s^{(i,j)} S_s^{(i)} dW_s^{(j)}.$$

Dabei bezeichnet μ die *Drift* und σ die *Volatilität*. Nach dem Itoschen Lemma gilt:

$$S_t^{(i)} = \exp\left(\int_0^t \mu_s ds - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \int_0^t |\sigma_s^{(i,j)}|^2 ds + \sum_{j=1}^p \int_0^t \sigma_s^{(i,j)} dW_s^{(j)}\right).$$

Nach dem Satz von Girsanov ist $S^{(i)} \in \mathfrak{C}$.

Konstitutive Gesetze

Bei der Modellierung unseres Aktienmarktes haben wir die Prozesse r , μ und σ als gegeben betrachtet. In Anwendungen sind diese Prozesse typischerweise durch konstitutive Gesetze der folgenden Form gegeben:

$$r_t = \hat{r}(t, S_t^{(0)}, \tilde{S}_t).$$

$$\mu_t^{(i)} = \hat{\mu}^{(i)}(t, S_t^{(0)}, \tilde{S}_t).$$

$$\sigma_t^{(i,j)} = \hat{\sigma}^{(i,j)}(t, S_t^{(0)}, \tilde{S}_t).$$

Dabei bezeichnen \hat{r} , $\hat{\mu}$ und $\hat{\sigma}$ stetige beschränkte Funktionen:

$$\hat{r} : I \times \mathbb{R}^{p+1} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$\hat{\mu}^{(i)} : I \times \mathbb{R}^{p+1} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$\hat{\sigma}^{(i,j)} : I \times \mathbb{R}^{p+1} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

In diesem Fall erhält man $S^{(0)}, \dots, S^{(p)}$ als Lösungen entsprechender stochastischer Differentialgleichungen. Dabei wird die Existenz und Eindeutigkeit solcher Lösungen durch Theorem 2.14 garantiert. Den Fall konstanter \hat{r} , $\hat{\mu}$ und $\hat{\sigma}$ bezeichnen wir als *Black-Scholes-Modell*.

Handelsstrategien und Wertprozesse

Wir betrachten ein Portfolio U , das aus $H^{(0)}$ Anteilen des Geldkontos sowie \tilde{H} Anteilen der Aktien besteht.

1. Seien $H^{(0)}, \dots, H^{(p)}$ progressiv messbar. $(H^{(0)}, \tilde{H})$ heisst *Handelsstrategie*.
2. Sei $U[H^{(0)}, \tilde{H}] \in \mathfrak{J}$ mit folgender Darstellung:

$$(U[H^{(0)}, \tilde{H}])_t = \sum_{i=0}^p H_t^{(i)} S_t^{(i)}.$$

$U[H^{(0)}, \tilde{H}]$ heisst *Wertprozess*.

Diskontierte Prozesse

Sei X ein stochastischer Prozess. Wir definieren den zugehörigen diskontierten Prozess durch:

$$X_t^* := \frac{X_t}{S_t^{(0)}} = \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) X_t.$$

M.a.W. wir verwenden den Geldkontoprozess als *Numeraire*. Mit Hilfe des Itoschen Lemmas erhalten wir:

$$(S^{(0)})^* = 1.$$

$$(S^{(i)})^*_t = 1 + \int_0^t (\mu_s^{(i)} - r_s) (S^{(i)})^*_s ds + \sum_{j=1}^p \int_0^t \sigma_s^{(i,j)} (S^{(i)})^*_s dW_s^{(j)}.$$

$$(U[H^{(0)}, \tilde{H}])^*_t = H_t^{(0)} + \sum_{i=1}^p H_t^{(i)} (S^{(i)})^*_t.$$

Theorem 3.1

Sei $(H^{(0)}, \tilde{H})$ eine Handelsstrategie. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $U[H^{(0)}, \tilde{H}] \in \mathfrak{J}$ mit folgender Darstellung:

$$(U[H^{(0)}, \tilde{H}])_t = (U[H^{(0)}, \tilde{H}])_0 + \sum_{i=0}^p \int_0^t H_s^{(i)} dS_s^{(i)}.$$

(b) $(U[H^{(0)}, \tilde{H}])^* \in \mathfrak{J}$ mit folgender Darstellung:

$$(U[H^{(0)}, \tilde{H}])_t^* = (U[H^{(0)}, \tilde{H}])_0^* + \sum_{i=1}^p \int_0^t H_s^{(i)} d(S^{(i)})_s^*.$$

$(H^{(0)}, \tilde{H})$ heißt selbstfinanzierend, falls eine der obigen Aussagen wahr ist.

Literaturhinweis

Siehe [15], Proposition 4.1.2, S.65.

Beweis

Sei X ein stochastischer Prozess. Nach dem Itoschen Lemma sind folgende Aussagen äquivalent:

$$X \in \mathfrak{J} \quad \Longleftrightarrow \quad X^* \in \mathfrak{J}.$$

Nach Konstruktion gilt:

$$X_t^* = \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) X_t.$$

$$X_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right) X_t^*.$$

Nach dem Itoschen Lemma gilt:

$$dX_t^* = \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) dX_t - r_t \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) X_t dt.$$

$$dX_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right) dX_t^* + r_t \exp\left(\int_0^t r_s ds\right) X_t^* dt.$$

Nach Konstruktion gilt ferner:

$$(S^{(0)})_t^* = 1.$$

$$d(S^{(0)})_t^* = 0.$$

Also sind folgende Aussagen äquivalent:

$$(U[H^{(0)}, \tilde{H}])_t = \sum_{i=0}^p H_t^{(i)} S_t^{(i)}.$$

$$d(U[H^{(0)}, \tilde{H}])_t = \sum_{i=0}^p H_t^{(i)} dS_t^{(i)}.$$

\Leftrightarrow

$$(U[H^{(0)}, \tilde{H}])_t^* = H_t^{(0)} + \sum_{i=1}^p H_t^{(i)} (S^{(i)})_t^*.$$

$$d(U[H^{(0)}, \tilde{H}])_t^* = \sum_{i=1}^p H_t^{(i)} d(S^{(i)})_t^*.$$

Damit ist das Theorem bewiesen.

□

Marktpreis des Risikos

Wir nehmen im folgenden an, dass die Volatilitätsmatrix σ invertierbar ist. Seien dazu $\bar{\sigma}^{(1,1)}, \dots, \bar{\sigma}^{(p,p)} \in \mathfrak{C}$ beschränkt mit folgender Eigenschaft:

$$\sum_{j=1}^p \sigma_t^{(i,j)} \bar{\sigma}_t^{(j,k)} = \delta^{(i,k)}.$$

Dabei bezeichnet $\delta^{(i,k)}$ das Kronecker-Symbol. Wir definieren beschränkte Prozesse $\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(p)} \in \mathfrak{C}$ durch:

$$\rho_t^{(j)} := \sum_{k=1}^p \bar{\sigma}_t^{(j,k)} (\mu_t^{(k)} - r_t).$$

ρ heisst *Marktpreis des Risikos*. Nach Konstruktion gilt für die Aktienpreisprozesse:

$$S_t^{(i)} = 1 + \int_0^t r_s S_s^{(i)} ds + \sum_{j=1}^p \int_0^t \sigma_s^{(i,j)} S_s^{(i)} \rho_s^{(j)} ds + \sum_{j=1}^p \int_0^t \sigma_s^{(i,j)} S_s^{(i)} dW_s^{(j)}.$$

$$(S^{(i)})_t^* = 1 + \sum_{j=1}^p \int_0^t \sigma_s^{(i,j)} (S^{(i)})_s^* \rho_s^{(j)} ds + \sum_{j=1}^p \int_0^t \sigma_s^{(i,j)} (S^{(i)})_s^* dW_s^{(j)}.$$

Äquivalentes Martingalmaß

Wir wenden nun den Satz von Girsanov auf unser Aktienmarktmodell an.

1. Wir definieren einen stochastischen Prozess $\Phi \in \mathfrak{M}$ durch:

$$\Phi_t := \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \int_0^t |\rho_s^{(j)}|^2 ds - \sum_{j=1}^p \int_0^t \rho_s^{(j)} dW_s^{(j)} \right).$$

2. Wir definieren ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $Q : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ durch:

$$Q(A) := E_P[1_A \Phi_T].$$

3. Wir definieren unabhängige Brownsche Bewegungen $V^{(1)}, \dots, V^{(p)}$ bzgl. Q durch:

$$V_t^{(j)} := \int_0^t \rho_s^{(j)} ds + W_t^{(j)}.$$

4. Die Aktienpreisprozesse $S^{(1)}, \dots, S^{(p)}$ besitzen folgende Darstellung bzgl. Q :

$$S_t^{(i)} = 1 + \int_0^t r_s S_s^{(i)} ds + \sum_{j=1}^p \int_0^t \sigma_s^{(i,j)} S_s^{(i)} dV_s^{(j)}.$$

$$(S_t^{(i)})^* = 1 + \sum_{j=1}^p \int_0^t \sigma_s^{(i,j)} (S_s^{(i)})^* dV_s^{(j)}.$$

Nach dem Itoschen Lemma gilt:

$$S_t^{(i)} = \exp \left(\int_0^t r_s ds - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \int_0^t |\sigma_s^{(i,j)}|^2 ds + \sum_{j=1}^p \int_0^t \sigma_s^{(i,j)} dV_s^{(j)} \right).$$

$$(S_t^{(i)})^* = \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \int_0^t |\sigma_s^{(i,j)}|^2 ds + \sum_{j=1}^p \int_0^t \sigma_s^{(i,j)} dV_s^{(j)} \right).$$

Insbesondere ist $S^{(i)} \in \mathfrak{C}(Q)$ und $(S^{(i)})^* \in \mathfrak{M}(Q)$, d.h. die diskontierten Aktienpreisprozesse sind Martingale bzgl. Q .

Theorem 3.2

Sei $(H^{(0)}, \tilde{H})$ eine Handelsstrategie mit folgenden Eigenschaften:

1. $(H^{(0)}, \tilde{H})$ ist selbstfinanzierend.
2. $\forall i = 1, \dots, p$:

$$H^{(i)} (S^{(i)})^* \in \mathfrak{L}^2(Q).$$

Dann gilt:

$$(U[H^{(0)}, \tilde{H}])^* \in \mathfrak{M}(Q).$$

Insbesondere ist der diskontierte Wertprozess $(U[H^{(0)}, \tilde{H}])^*$ ein Martingal bzgl. Q .

Beweis

Nach Theorem 3.1 und dem Satz von Girsanov besitzt $(U[H^{(0)}, \tilde{H}])^*$ folgende Darstellung bzgl. Q :

$$\begin{aligned} (U[H^{(0)}, \tilde{H}])^*_t &= (U[H^{(0)}, \tilde{H}])^*_0 + \sum_{i=1}^p \int_0^t H_s^{(i)} d(S^{(i)})^*_s \\ &= (U[H^{(0)}, \tilde{H}])^*_0 + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \int_0^t \sigma_s^{(i,j)} H_s^{(i)} (S^{(i)})^*_s dV_s^{(j)}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\sigma \in \mathfrak{C}(P)$ beschränkt. Also ist $\sigma \in \mathfrak{C}(Q)$ beschränkt. Damit folgt die Behauptung aus der Itoschen Isometrie.

□

3.2 Derivate mit europäischem Ausübungsrecht

Derivate mit europäischem Ausübungsrecht

Wir betrachten ein Derivat Z_T mit europäischem Ausübungsrecht. Z_T beschreibt eine Zahlung zur Zeit $t = T$, welche durch einen Kontrakt festgelegt wird. Wir nehmen an, dass Z_T folgende Regularität besitzt:

$$Z_T^* \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, Q).$$

Problemstellung

Sei Z_T ein Derivat mit europäischem Ausübungsrecht. Gesucht ist der *faire Preis* $Z_0 \in \mathbb{R}$ des zugehörigen Kontraktes zur Zeit $t = 0$.

Fairer Preis

Sei Z_T ein Derivat mit europäischem Ausübungsrecht, sei $(H^{(0)}, \tilde{H})$ eine Handelsstrategie, und seien folgende Voraussetzungen gegeben:

1. $(H^{(0)}, \tilde{H})$ ist selbstfinanzierend.
2. $\forall i = 1, \dots, p$:

$$H^{(i)} (S^{(i)})^* \in \mathfrak{L}^2(Q).$$

3. $(H^{(0)}, \tilde{H})$ ist eine replizierende Handelsstrategie für Z_T :

$$Z_T = (U[H^{(0)}, \tilde{H}])_T.$$

Wir definieren den fairen Preis Z_0 des Derivates Z_T zur Zeit $t = 0$ durch:

$$Z_0 := (U[H^{(0)}, \tilde{H}])_0.$$

M.a.W. der faire Preis Z_0 des Derivates Z_T ist der Wert eines replizierenden Portfolios $U[H^{(0)}, \tilde{H}]$ zur Zeit $t = 0$.

Bemerkung

1. Nach Konstruktion ist $(U[H^{(0)}, \tilde{H}])_0$ eine $\mathcal{F}_0/\mathcal{B}$ -messbare Zufallsvariable, also konstant. Also ist tatsächlich $Z_0 \in \mathbb{R}$.
2. Sei $(K^{(0)}, \tilde{K})$ eine weitere Handelsstrategie, welche den Voraussetzungen 1, 2 und 3 in der Definition des fairen Preises genügt. Nach Theorem 3.2 gilt:

$$(U[H^{(0)}, \tilde{H}])^* \in \mathfrak{M}(Q).$$

$$(U[K^{(0)}, \tilde{K}])^* \in \mathfrak{M}(Q).$$

Nach Voraussetzung 3 in der Definition des fairen Preises und der Definition der Norm $\|\cdot\|_{\mathfrak{M}(Q)}$ gilt:

$$\left\| (U[H^{(0)}, \tilde{H}])^* - (U[K^{(0)}, \tilde{K}])^* \right\|_{\mathfrak{M}(Q)} = 0.$$

Also ist der Wert des replizierenden Portfolios $U[H^{(0)}, \tilde{H}]$ unabhängig von der speziellen Wahl der Handelsstrategie $(H^{(0)}, \tilde{H})$. Insbesondere ist die Definition des fairen Preises Z_0 für das Derivat Z_T unabhängig von der speziellen Wahl der Handelsstrategie $(H^{(0)}, \tilde{H})$.

Theorem 3.3 (Prinzip der risikoneutralen Bewertung)

Sei Z_T ein Derivat mit europäischem Ausübungsrecht. Dann gilt:

(a) Es gibt eine Handelsstrategie $(H^{(0)}, \tilde{H})$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $(H^{(0)}, \tilde{H})$ ist selbstfinanzierend.
2. $\forall i = 1, \dots, p$:

$$H^{(i)} (S^{(i)})^* \in \mathfrak{L}^2(Q).$$

3. $(H^{(0)}, \tilde{H})$ ist eine replizierende Handelsstrategie für Z_T .

(b) Das replizierende Portfolio $U[H^{(0)}, \tilde{H}]$ besitzt folgende Darstellung:

$$(U[H^{(0)}, \tilde{H}])_t^* = E_Q[Z_T^* | \mathcal{F}_t] = E_Q \left[\exp \left(- \int_0^T r_t dt \right) Z_T \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

(c) Der faire Preis Z_0 des Derivates Z_T besitzt folgende Darstellung:

$$Z_0 = E_Q[Z_T^*] = E_Q \left[\exp \left(- \int_0^T r_t dt \right) Z_T \right].$$

Literaturhinweis

Siehe [15], Theorem 4.3.2, S.68.

Beweis

(a) Nach Konstruktion gilt:

$$Z_T^* \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, Q).$$

Nach dem Beweis des Darstellungssatzes für Brownsche Martingale gibt es Prozesse $B^{(1)}, \dots, B^{(p)} \in \mathfrak{L}^2(Q)$ mit folgender Eigenschaft:

$$Z_T^* = E_Q[Z_T^*] + \sum_{j=1}^p \int_0^T B_s^{(j)} dV_s^{(j)} \quad (\text{fast sicher}).$$

Wir definieren Prozesse $H^{(1)}, \dots, H^{(p)} \in \mathfrak{L}_{loc}^2(Q)$ durch:

$$H_t^{(i)} := \frac{1}{(S^{(i)})_t^*} \sum_{j=1}^p B_t^{(j)} \bar{\sigma}_t^{(j,i)}.$$

Wir definieren ferner einen Prozess $H^{(0)} \in \mathfrak{L}_{loc}^2(Q)$ durch:

$$H_t^{(0)} := E_Q[Z_T^* | \mathcal{F}_t] - \sum_{i=1}^p H_t^{(i)} (S^{(i)})_t^*.$$

Damit ist eine Handelsstrategie $(H^{(0)}, \tilde{H})$ definiert. Für den zugehörigen Wertprozess $U[H^{(0)}, \tilde{H}]$ gilt:

$$(U[H^{(0)}, \tilde{H}])_t^* = E_Q[Z_T^* | \mathcal{F}_t] = E_Q[Z_T^*] + \sum_{j=1}^p \int_0^t B_s^{(j)} dV_s^{(j)}.$$

Die Handelsstrategie $(H^{(0)}, \tilde{H})$ besitzt folgende Eigenschaften:

1. Nach Konstruktion gilt:

$$(U[H^{(0)}, \tilde{H}])_0^* = E_Q[Z_T^* | \mathcal{F}_0] = E_Q[Z_T^*].$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p \int_0^t B_s^{(j)} dV_s^{(j)} &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \int_0^t \sigma_s^{(i,j)} H_s^{(i)} (S^{(i)})_s^* dV_s^{(j)} \\ &= \sum_{i=1}^p \int_0^t H_s^{(i)} d(S^{(i)})_s^*. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} (U[H^{(0)}, \tilde{H}])_t^* &= E_Q[Z_T^*] + \sum_{j=1}^p \int_0^t B_s^{(j)} dV_s^{(j)} \\ &= (U[H^{(0)}, \tilde{H}])_0^* + \sum_{i=1}^p \int_0^t H_s^{(i)} d(S^{(i)})_s^*. \end{aligned}$$

Also ist $(H^{(0)}, \tilde{H})$ selbstfinanzierend.

2. Nach Voraussetzung ist $\bar{\sigma} \in \mathfrak{C}(P)$ beschränkt. Also ist $\bar{\sigma} \in \mathfrak{C}(Q)$ beschränkt. Daraus folgt:

$$H^{(i)} (S^{(i)})^* \in \mathfrak{L}^2(Q).$$

3. Nach Konstruktion gilt:

$$(U[H^{(0)}, \tilde{H}])_T^* = E_Q[Z_T^* | \mathcal{F}_T] = Z_T^*.$$

Also ist $(H^{(0)}, \tilde{H})$ eine replizierende Handelsstrategie für Z_T .

(b) Nach Theorem 3.2 ist $(U[H^{(0)}, \tilde{H}])^*$ ein Martingal bzgl. Q . Daraus folgt:

$$(U[H^{(0)}, \tilde{H}])_t^* = E_Q[(U[H^{(0)}, \tilde{H}])_T^* | \mathcal{F}_t] = E_Q[Z_T^* | \mathcal{F}_t].$$

(c) Nach Konstruktion ist $S_0^{(0)} = 1$. Daraus folgt:

$$Z_0 = Z_0^*.$$

Nach Konstruktion ist Z_0^* eine $\mathcal{F}_0/\mathcal{B}$ -messbare Zufallsvariable, also konstant. Daraus folgt:

$$Z_0^* = E_Q[Z_0^*].$$

Damit folgt die Behauptung aus (a).

□

Beispiel 3.1

Wir betrachten nun spezielle Derivate Z_T mit europäischem Ausübungsrecht.

- **Zerobond**

Sei $\bar{Z} > 0$. Ein Zerobond garantiert seinem Halter eine fixe Zahlung zur Zeit $t = T$ in Höhe von \bar{Z} :

$$Z_T = \bar{Z}.$$

Nach dem Prinzip der risikoneutralen Bewertung gilt für den fairen Preis Z_0 des Zerobonds zur Zeit $t = 0$:

$$Z_0 = E_Q[Z_T^*] = \bar{Z} E_Q \left[\exp \left(- \int_0^T r_s ds \right) \right].$$

- **Forwardkontrakt**

Sei $\bar{S} > 0$. Ein Forwardkontrakt legt fest, dass der Halter die Aktie $S^{(1)}$ zur Zeit $t = T$ zum Preis \bar{S} kauft. Der Halter des Kontraktes erhält zur Zeit $t = T$ also folgende Zahlung:

$$Z_T = S_T^{(1)} - \bar{S}.$$

Nach dem Prinzip der risikoneutralen Bewertung gilt für den fairen Preis Z_0 des Forwardkontraktes zur Zeit $t = 0$:

$$Z_0 = E_Q[Z_T^*] = 1 - \bar{S} E_Q \left[\exp \left(- \int_0^T r_s ds \right) \right].$$

In der Praxis werden Forwardkontrakte häufig so abgeschlossen, dass der faire Preis Z_0 zur Zeit $t = 0$ gerade Null ist. Auflösen der obigen Gleichung liefert:

$$Z_0 = 0 \quad \iff \quad \bar{S} = \frac{1}{E_Q \left[\exp \left(- \int_0^T r_s ds \right) \right]}.$$

In diesem Fall ist \bar{S} der *faire Forwardpreis* der Aktie $S^{(1)}$.

- **Europäische Calloption**

Sei $\bar{S} > 0$. Eine europäische Calloption erlaubt ihrem Halter, die Aktie $S^{(1)}$ zur Zeit $t = T$ zum Preis \bar{S} zu kaufen. Der Halter der Option erhält zur Zeit $t = T$ also folgende Zahlung:

$$Z_T = \max\{S_T^{(1)} - \bar{S}, 0\}.$$

Nach dem Prinzip der risikoneutralen Bewertung gilt für den fairen Preis Z_0 der europäischen Calloption zur Zeit $t = 0$:

$$Z = E_Q[Z_T^*] = E_Q \left[\exp \left(- \int_0^T r_s ds \right) \max\{S_T^{(1)} - \bar{S}, 0\} \right].$$

- **Europäische Putoption**

Sei $\bar{S} > 0$. Eine europäische Putoption erlaubt ihrem Halter, die Aktie $S^{(1)}$ zur Zeit $t = T$ zum Preis \bar{S} zu verkaufen. Der Halter der Option erhält zur Zeit $t = T$ also folgende Zahlung:

$$Z_T = \max\{\bar{S} - S_T^{(1)}, 0\}.$$

Nach dem Prinzip der risikoneutralen Bewertung gilt für den fairen Preis Z_0 der europäischen Putoption zur Zeit $t = 0$:

$$Z = E_Q[Z_T^*] = E_Q \left[\exp \left(- \int_0^T r_s ds \right) \max\{\bar{S} - S_T^{(1)}, 0\} \right].$$

- **Put–Call–Parität für europäische Optionen**

Sei $\bar{S} > 0$, sei Z_T^C die zugehörige europäische Calloption, sei Z_T^P die zugehörige europäische Putoption, und sei Z_T^F der zugehörige Forwardkontrakt. Nach Konstruktion gilt:

$$\begin{aligned} Z_T^C - Z_T^P &= \max\{S_T^{(1)} - \bar{S}, 0\} - \max\{\bar{S} - S_T^{(1)}, 0\} \\ &= \max\{S_T^{(1)} - \bar{S}, 0\} + \min\{S_T^{(1)} - \bar{S}, 0\} \\ &= S_T^{(1)} - \bar{S} \\ &= Z_T^F. \end{aligned}$$

Daraus folgt für die zugehörigen fairen Preise:

$$Z_0^C - Z_0^P = Z_0^F.$$

- **Asiatische Option**

Im Falle einer asiatischen Option hängt die Auszahlung zur Zeit $t = T$ vom Mittelwert \bar{S}_T der Preise der Aktie $S^{(1)}$ zu den Zeiten $t \in I$ ab:

$$\bar{S}_T := \frac{1}{T} \int_0^T S_t^{(1)} dt.$$

Typische Auszahlungsprofile für asiatische Optionen sind die folgenden:

$$Z_T = \max\{\bar{S}_T - \bar{S}, 0\} \quad (\text{asiatische Calloption}).$$

$$Z_T = \max\{\bar{S} - \bar{S}_T, 0\} \quad (\text{asiatische Putoption}).$$

$$Z_T = \max\{S_T^{(1)} - \bar{S}_T, 0\} \quad (\text{asiatische Strikecalloption}).$$

$$Z_T = \max\{\bar{S}_T - S_T^{(1)}, 0\} \quad (\text{asiatische Strikeputoption}).$$

• **Barrieroption**

Sei $0 \leq a < 1 < b \leq \infty$, und sei Z_T ein Derivat mit europäischem Ausübungsrecht. Eine Barrieroption garantiert ihrem Halter die Zahlung Z_T zur Zeit $t = T$, falls die Aktie $S^{(1)}$ das Intervall (a, b) im Zeitintervall I nicht verlässt. Anderenfalls erhält der Halter keine Zahlung. Wir betrachten die erste Austrittszeit für die Aktie $S^{(1)}$ aus dem Intervall (a, b) :

$$\tau(\omega) := \inf \{t \in I \mid S^{(1)}(t, \omega) \notin (a, b)\}.$$

Nach Konstruktion erhält der Halter der Barrieroption zur Zeit T folgende Zahlung:

$$Z_T^{(B)} := \begin{cases} Z_T & \text{falls } \tau = \infty; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach dem Prinzip der risikoneutralen Bewertung gilt für den fairen Preis $Z_0^{(B)}$ der Barrieroption zur Zeit $t = 0$:

$$Z_0 = E_Q[1_{\{\tau=\infty\}} Z_T^*] = E_Q \left[1_{\{\tau=\infty\}} \exp \left(- \int_0^T r_t dt \right) Z_T \right].$$

Bemerkung

Bisher haben wir immer Derivate betrachtet, deren Auszahlung zur Zeit $t = T$ stattfindet. Sei nun $\bar{t} \in I$, und sei $Z_{\bar{t}}$ ein Derivat mit europäischem Ausübungsrecht, dessen Auszahlung zur Zeit $t = \bar{t}$ stattfindet. Wir nehmen an, dass $Z_{\bar{t}}$ folgende Regularität besitzt:

$$Z_{\bar{t}}^* \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{\bar{t}}, Q).$$

Wir nehmen an, dass die Auszahlung zur Zeit $t = \bar{t}$ in das Geldkonto investiert wird. Dann ist der Wert der Auszahlung zur Zeit $t = T$ gegeben durch:

$$Z_T := \frac{S_T^{(0)}}{S_{\bar{t}}^{(0)}} Z_{\bar{t}} = \exp \left(\int_{\bar{t}}^T r_s ds \right) Z_{\bar{t}}.$$

Nach dem Prinzip der risikoneutralen Bewertung gibt es eine replizierende Handelsstrategie $(H^{(0)}, \tilde{H})$ für Z_T . Wir betrachten den zugehörigen Wertprozess $U[H^{(0)}, \tilde{H}]$. Nach dem Prinzip der risikoneutralen Bewertung gilt:

$$(U[H^{(0)}, \tilde{H}])_{\bar{t}}^* = E_Q[Z_T^* | \mathcal{F}_{\bar{t}}] = E_Q[Z_{\bar{t}}^* | \mathcal{F}_{\bar{t}}] = Z_{\bar{t}}^*.$$

Also ist $(H^{(0)}, \tilde{H})$ eine replizierende Handelsstrategie für $Z_{\bar{t}}$. Wir definieren den fairen Preis $Z_0 \in \mathbb{R}$ des Derivates $Z_{\bar{t}}$ zur Zeit $t = 0$ durch:

$$Z_0 := (U[H^{(0)}, \tilde{H}])_0.$$

Nach dem Prinzip der risikoneutralen Bewertung gilt:

$$Z_0 = E_Q[Z_T^*] = E_Q[Z_{\bar{t}}^*].$$

Insgesamt gilt das Prinzip der risikoneutralen Bewertung also auch für $Z_{\bar{t}}$.

3.3 Derivate mit amerikanischem Ausübungsrecht

Derivate mit amerikanischem Ausübungsrecht

Wir betrachten ein Derivat Y mit amerikanischem Ausübungsrecht. Y_t beschreibt eine Zahlung zur Zeit t , welche durch einen Kontrakt festgelegt wird. Dabei kann der Ausübungszeitpunkt t vom Halter des Derivates gewählt werden. Wir nehmen an, dass Y folgende Regularität besitzt:

$$Y^* \in \mathfrak{C}(Q).$$

Wir betrachten zwei Ausprägungen des amerikanischen Ausübungsrechtes:

- **Eingeschränktes amerikanisches Ausübungsrecht**

Wir nehmen an, dass das Derivat zu diskreten Zeitpunkten $t = \tau^{(n)}$ ausgeübt werden kann. Wir nehmen an, dass $\tau^{(n)}$ folgende Regularität besitzt:

1. $\tau^{(n)}$ ist eine Stoppzeit.
2. $\tau^{(n)}$ besitzt folgenden Wertebereich:

$$\tau^{(n)} \in I^{(n)} := \left\{ t_k^{(n)} = \frac{kT}{2^n} \mid k = 0, \dots, 2^n \right\}.$$

- **Uneingeschränktes amerikanisches Ausübungsrecht**

Wir nehmen an, dass das Derivat zu beliebigen Zeitpunkten $t = \tau$ ausgeübt werden kann. Wir nehmen an, dass τ folgende Regularität besitzt:

1. τ ist eine Stoppzeit.
2. τ besitzt folgenden Wertebereich:

$$\tau \in I = [0, T].$$

Problemstellung

Sei Y ein Derivat mit amerikanischem Ausübungsrecht. Gesucht ist der *faire Preis* des zugehörigen Kontraktes zur Zeit $t = 0$.

Fairer Preis

Sei Y ein Derivat mit amerikanischem Ausübungsrecht.

- **Eingeschränktes amerikanisches Ausübungsrecht**

Sei $\tau^{(n)}$ eine Stoppzeit mit Wertebereich $I^{(n)}$. Wir nehmen an, dass der Halter des Derivates die Ausübungsstrategie $\tau^{(n)}$ wählt. Dann erhält dieser zu den Zeitpunkten $t \in I^{(n)}$ folgende Zahlungen:

$$Y_t^{(n)} := 1_{\{\tau^{(n)}=t\}} Y_t.$$

Nach dem Prinzip der risikoneutralen Bewertung gilt für den fairen Preis $(Z[\tau^{(n)}])_0$ dieser Zahlungen zur Zeit $t = 0$:

$$(Z[\tau^{(n)}])_0 = \sum_{t \in I^{(n)}} E_Q[(Y^{(n)})_t^*] = E_Q[Y_{\tau^{(n)}}^*].$$

Nach Voraussetzung kann die Ausübungsstrategie $\tau^{(n)}$ frei gewählt werden. Deshalb definieren wir den fairen Preis $Z_0^{(n)} \in \mathbb{R}$ des Derivates zur Zeit $t = 0$ durch:

$$\begin{aligned} Z_0^{(n)} &:= \sup \{ (Z[\tau^{(n)}])_0 \mid \tau^{(n)} \text{ ist Stoppzeit mit } \tau^{(n)} \in I^{(n)} \} \\ &= \sup \{ E_Q[Y_{\tau^{(n)}}^*] \mid \tau^{(n)} \text{ ist Stoppzeit mit } \tau^{(n)} \in I^{(n)} \}. \end{aligned}$$

- **Uneingeschränktes amerikanisches Ausübungsrecht**

Nach Konstruktion konvergiert die Feinheit der Zerlegungen $I^{(n)}$ gegen Null. Deshalb definieren wir den fairen Preis $Z_0 \in \mathbb{R}$ des Derivates zur Zeit $t = 0$ durch:

$$Z_0 := \sup \{ E_Q[Y_\tau^*] \mid \tau \text{ ist Stoppzeit mit } \tau \in I \}.$$

Mit Hilfe der Jensenschen Ungleichung erhalten wir:

$$|Z_0^{(n)}| \leq |Z_0| \leq \|Y^*\|_{\mathcal{C}(Q)}.$$

Insbesondere sind tatsächlich $Z_0^{(n)}, Z_0 \in \mathbb{R}$.

Theorem 3.4

Sei Y ein Derivat mit uneingeschränktem amerikanischem Ausübungsrecht. Dann gilt für den fairen Preis Z_0 des Derivates zur Zeit $t = 0$:

$$Z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_0^{(n)}.$$

Beweis

Nach Voraussetzung ist $(I^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Kette von Zerlegungen von I . Also ist $(Z^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge. Nach Konstruktion ist $(Z^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt. Also ist $(Z^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent. Wir definieren:

$$\bar{Z}_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} Z_0^{(n)}.$$

Nach Konstruktion gilt:

$$\bar{Z}_0 \leq Z_0.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Konstruktion gibt es eine Stoppzeit τ mit $\tau \in I$ und folgender Eigenschaft:

$$Z_0 \leq E_Q[Y_\tau^*] + \varepsilon.$$

Wir definieren eine Folge $(\tau^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ von Stoppzeiten mit $\tau^{(n)} \in I^{(n)}$ durch:

$$\tau^{(n)} := \sum_{k=1}^n 1_{\{t_{k-1}^{(n)} < \tau \leq t_k^{(n)}\}} t_k^{(n)}.$$

Nach Konstruktion gilt:

$$\tau^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tau.$$

Nach Voraussetzung ist $Y^* \in \mathfrak{C}$. Mit Hilfe des Satzes von Lebesgue über dominierende Konvergenz erhalten wir:

$$E_Q[Y_\tau^*] = \lim_{n \rightarrow \infty} E_Q[Y_{\tau^{(n)}}^*] \leq \bar{Z}_0.$$

Daraus folgt insgesamt:

$$\bar{Z}_0 \leq Z_0 \leq \bar{Z}_0 + \varepsilon.$$

Dabei war $\varepsilon > 0$ beliebig. Daraus folgt die Behauptung.

□

Definition

Sei Y ein Derivat mit eingeschränktem amerikanischem Ausübungsrecht. Wir definieren:

$$\left(\bar{Y}^{(n)}\right)_T^* := Y_T^*.$$

$$\left(\bar{Y}^{(n)}\right)_{t_k^{(n)}}^* := \max \left\{ Y_{t_k^{(n)}}^*, E_Q \left[\left(\bar{Y}^{(n)}\right)_{t_{k+1}^{(n)}}^* \mid \mathcal{F}_{t_k^{(n)}} \right] \right\} \quad (k = 2^n - 1, \dots, 0).$$

$$\bar{\tau}^{(n)} := \min \left\{ t \in I^{(n)} \mid \left(\bar{Y}^{(n)} \right)_t^* = Y_t^* \right\}.$$

$\left(\bar{Y}^{(n)} \right)^*$ heisst *Snellsche Hülle* von Y^* .

Theorem 3.5

Sei Y ein Derivat mit eingeschränktem amerikanischem Ausübungsrecht.

(a) Für den fairen Preis $Z_0^{(n)}$ des Derivates zur Zeit $t = 0$ gilt:

$$Z_0^{(n)} = E_Q[Y_{\bar{\tau}^{(n)}}^*].$$

Insbesondere ist $\bar{\tau}^{(n)}$ eine optimale Ausübungsstrategie.

(b) Sei Y^* ein Submartingal bzgl Q . Dann gilt für den fairen Preis $Z_0^{(n)}$ des Derivates zur Zeit $t = 0$:

$$Z_0^{(n)} = E_Q[Y_T^*].$$

Insbesondere ist $\tau^{(n)} = T$ eine optimale Ausübungsstrategie.

Beweis

(a) Nach Konstruktion gilt einerseits:

$$\left(\bar{Y}^{(n)} \right)_{\bar{\tau}^{(n)}}^* = \sum_{t \in I^{(n)}} 1_{\{\bar{\tau}^{(n)}=t\}} \left(\bar{Y}^{(n)} \right)_t^* = \sum_{t \in I^{(n)}} 1_{\{\bar{\tau}^{(n)}=t\}} Y_t^* = Y_{\bar{\tau}^{(n)}}^*.$$

Nach Konstruktion gilt andererseits:

$$\begin{aligned} \left(\bar{Y}^{(n)} \right)_{\bar{\tau}^{(n)}}^* &= \sum_{k=0}^n 1_{\{\bar{\tau}^{(n)}=t_k^{(n)}\}} \left(\bar{Y}^{(n)} \right)_{t_k^{(n)}}^* \\ &= \left(\bar{Y}^{(n)} \right)_0^* + \sum_{k=1}^n 1_{\{\bar{\tau}^{(n)}=t_k^{(n)}\}} \left(\left(\bar{Y}^{(n)} \right)_{t_k^{(n)}}^* - \left(\bar{Y}^{(n)} \right)_0^* \right) \\ &= \left(\bar{Y}^{(n)} \right)_0^* + \sum_{k=1}^n 1_{\{\bar{\tau}^{(n)}=t_k^{(n)}\}} \left(\left(\bar{Y}^{(n)} \right)_{t_k^{(n)}}^* - \left(\bar{Y}^{(n)} \right)_0^* \right) \\ &= \left(\bar{Y}^{(n)} \right)_0^* + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k 1_{\{\bar{\tau}^{(n)}=t_k^{(n)}\}} \left(\left(\bar{Y}^{(n)} \right)_{t_l^{(n)}}^* - \left(\bar{Y}^{(n)} \right)_{t_{l-1}^{(n)}}^* \right) \\ &= \left(\bar{Y}^{(n)} \right)_0^* + \sum_{l=1}^n \sum_{k=l}^n 1_{\{\bar{\tau}^{(n)}=t_k^{(n)}\}} \left(\left(\bar{Y}^{(n)} \right)_{t_l^{(n)}}^* - \left(\bar{Y}^{(n)} \right)_{t_{l-1}^{(n)}}^* \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\bar{Y}^{(n)}\right)_0^* + \sum_{l=1}^n \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}^{(n)} > t_{l-1}^{(n)}\}} \left(\left(\bar{Y}^{(n)}\right)_{t_l^{(n)}}^* - \left(\bar{Y}^{(n)}\right)_{t_{l-1}^{(n)}}^* \right) \\
&= \left(\bar{Y}^{(n)}\right)_0^* + \sum_{l=1}^n \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}^{(n)} > t_{l-1}^{(n)}\}} \left(\left(\bar{Y}^{(n)}\right)_{t_l^{(n)}}^* - E_Q \left[\left(\bar{Y}^{(n)}\right)_{t_l^{(n)}}^* \mid \mathcal{F}_{t_{l-1}^{(n)}} \right] \right).
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$E_Q[Y_{\bar{\tau}^{(n)}}^*] = E_Q \left[\left(\bar{Y}^{(n)}\right)_{\bar{\tau}^{(n)}}^* \right] = \left(\bar{Y}^{(n)}\right)_0^*.$$

Nach Konstruktion gilt:

1. $\bar{\tau}^{(n)}$ ist eine Stoppzeit mit $\bar{\tau}^{(n)} \in I^{(n)}$.
2. $\left(\bar{Y}^{(n)}\right)^*$ ist ein Supermartingal bzgl. $(Q, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I^{(n)}})$.

Sei $\tau^{(n)}$ eine Stoppzeit mit $\tau^{(n)} \in I^{(n)}$. Mit Hilfe des Satzes von Doob über Optional Sampling erhalten wir:

$$\left(\bar{Y}^{(n)}\right)_0^* \geq E_Q \left[\left(\bar{Y}^{(n)}\right)_{\tau^{(n)}}^* \right] \geq E_Q[Y_{\tau^{(n)}}^*].$$

Daraus folgt insgesamt:

$$E_Q[Y_{\bar{\tau}^{(n)}}^*] \geq E_Q[Y_{\tau^{(n)}}^*].$$

Dabei war $\tau^{(n)}$ beliebig. Daraus folgt:

$$E_Q[Y_{\bar{\tau}^{(n)}}^*] = \sup \{ E_Q[Y_{\tau^{(n)}}^*] \mid \tau^{(n)} \text{ ist Stoppzeit mit } \tau^{(n)} \in I^{(n)} \}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

- (b) Sei $\tau^{(n)}$ eine Stoppzeit mit $\tau^{(n)} \in I^{(n)}$. Nach Voraussetzung ist Y^* ein Submartingal bzgl. Q . Mit Hilfe des Satzes von Doob über Optional Sampling erhalten wir:

$$Y_{\tau^{(n)}}^* \leq E_Q[Y_T^* \mid \mathcal{F}_{\tau^{(n)}}].$$

Daraus folgt:

$$E_Q[Y_{\tau^{(n)}}^*] \leq E_Q[Y_T^*].$$

Dabei war $\tau^{(n)}$ beliebig. Daraus folgt:

$$E_Q[Y_T^*] = \sup \{ E_Q[Y_{\tau^{(n)}}^*] \mid \tau^{(n)} \text{ ist Stoppzeit mit } \tau^{(n)} \in I^{(n)} \}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

□

Definition

Sei Y ein Derivat mit uneingeschränktem amerikanischem Ausübungsrecht, und sei Y nach unten beschränkt. Wir definieren:

$$\bar{Y}_t^* := \text{ess sup} \{E_Q[Y_\tau^* | \mathcal{F}_t] \mid \tau \text{ ist Stoppzeit mit } \tau \in [t, T]\}.$$

$$\bar{\tau} := \lim_{\lambda \rightarrow 1+} \inf \left\{ t \in I \mid \lambda \bar{Y}_t^* \leq Y_t^* \right\}.$$

Dabei ist \bar{Y}^* ein RCLL-Supermartingal bzgl. Q . \bar{Y}^* heisst *Snellsche Hülle* von Y^* .

Theorem 3.6

Sei Y ein Derivat mit uneingeschränktem amerikanischem Ausübungsrecht.

(a) Für den fairen Preis Z_0 des Derivates zur Zeit $t = 0$ gilt:

$$Z_0 = E_Q[Y_{\bar{\tau}}^*].$$

Insbesondere ist $\bar{\tau}$ eine optimale Ausübungsstrategie.

(b) Sei Y^* ein Submartingal bzgl. Q . Dann gilt für den fairen Preis Z_0 des Derivates zur Zeit $t = 0$:

$$Z_0 = E_Q[Y_T^*].$$

Insbesondere ist $\tau = T$ eine optimale Ausübungsstrategie.

Literaturhinweis

Siehe [13], Theorem D.12, S.358.

Beweis

(a) Siehe Literaturhinweis.

(b) Die Behauptung folgt sofort aus Theorem 3.4 und Theorem 3.5 (b).

□

Bemerkung

Sei Y ein Derivat mit amerikanischem Ausübungsrecht, sei $J \subset I$ die Menge der Ausübungszeitpunkte, und sei $Z_0^{(A)}$ der faire Preis. Sei ferner Y_T das zugehörige Derivat mit europäischem Ausübungsrecht, und sei $Z_0^{(E)}$ der faire Preis.

(a) Nach dem Prinzip der risikoneutralen Bewertung gilt:

$$Z_0^{(A)} = \sup \{E_Q[Y_\tau^*] \mid \tau \text{ ist Stoppzeit mit } \tau \in J\} \geq E_Q[Y_T^*] = Z_0^{(E)}.$$

M.a.W. der faire Preis eines Derivates mit amerikanischem Ausübungsrecht ist i.a. höher als der faire Preis des zugehörigen Derivates mit europäischem Ausübungsrecht. Dies ist nicht überraschend, da das Derivat mit amerikanischem Ausübungsrecht seinem Halter die vorzeitige Ausübung als zusätzliches Recht einräumt.

(b) Sei nun Y^* ein Submartingal bzgl. Q . Nach dem Prinzip der risikoneutralen Bewertung gilt:

$$Z_0^{(A)} = E_Q[Y_T^*] = Z_0^{(E)}.$$

M.a.W. der faire Preis des Derivates mit amerikanischem Ausübungsrecht und der faire Preis des zugehörigen Derivates mit europäischem Ausübungsrecht stimmen in diesem Fall überein. Insbesondere ist $\tau = \bar{t}$ eine optimale Ausübungsstrategie.

Beispiel 3.2

Sei $N = 1$, und sei $\bar{S} > 0$. Wir betrachten Derivate mit amerikanischem Ausübungsrecht.

• Amerikanische Calloption

Eine amerikanische Calloption erlaubt ihrem Halter, die Aktie zum Preis \bar{S} zu kaufen. Diese kann er sofort wieder zum Marktpreis $S^{(1)}$ verkaufen. Der Halter der Option erhält bei Ausübung zur Zeit t also folgende Zahlung:

$$Y_t := \max\{S_t^{(1)} - \bar{S}, 0\}.$$

Wir machen folgende zusätzliche Annahme:

$$r_t \geq 0.$$

M.a.W. die Verzinsung des Geldkontos ist nichtnegativ. Mit Hilfe der Jensenschen Ungleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned} E_Q[Y_{t+h}^* | \mathcal{F}_t] &= E_Q \left[\max \left\{ (S^{(1)})_{t+h}^* - \exp \left(- \int_0^{t+h} r_s ds \right) \bar{S}, 0 \right\} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\geq \max \left\{ E_Q \left[(S^{(1)})_{t+h}^* - \exp \left(- \int_0^{t+h} r_s ds \right) \bar{S} \mid \mathcal{F}_t \right], 0 \right\} \\ &\geq \max \left\{ E_Q \left[(S^{(1)})_{t+h}^* - \exp \left(- \int_0^t r_s ds \right) \bar{S} \mid \mathcal{F}_t \right], 0 \right\} \\ &= \max \left\{ (S^{(1)})_t^* - \exp \left(- \int_0^t r_s ds \right) \bar{S}, 0 \right\} \end{aligned}$$

$$= Y_t^*.$$

Also ist Y^* ein Submartingal bzgl. Q . Nach der obigen Bemerkung stimmen der faire Preis der amerikanischen Calloption zur Zeit $t = 0$ und der faire Preis der europäischen Calloption zur Zeit $t = 0$ überein. Insbesondere gilt:

$$Z_0 = E_Q \left[\exp \left(- \int_0^t r_s ds \right) \max \{ S_T^{(1)} - \bar{S}, 0 \} \right].$$

• Amerikanische Putoption

Eine amerikanische Putoption erlaubt ihrem Halter, die Aktie zum Preis \bar{S} zu verkaufen. Diese kann er sofort wieder zum Marktpreis $S^{(1)}$ kaufen. Der Halter der Option erhält bei Ausübung zur Zeit t also folgende Zahlung:

$$Y_t := \max \{ \bar{S} - S_t^{(1)}, 0 \}.$$

Der faire Preis $Z_0^{(n)}$ der amerikanischen Putoption zur Zeit $t = 0$ kann nun schrittweise berechnet werden.

1. Bestimmung der Snellschen Hülle $(\bar{Y}^{(n)})^*$ von Y^* :

$$(\bar{Y}^{(n)})_T^* := Y_T^*.$$

$$(\bar{Y}^{(n)})_{t_k^{(n)}}^* := \max \left\{ Y_{t_k^{(n)}}^*, E_Q \left[(\bar{Y}^{(n)})_{t_{k+1}^{(n)}}^* \mid \mathcal{F}_{t_k^{(n)}} \right] \right\} \quad (k = 2^n - 1, \dots, 0).$$

2. Bestimmung der optimalen Ausübungsstrategie $\bar{\tau}^{(n)}$:

$$\bar{\tau}^{(n)} := \min \left\{ t \in I^{(n)} \mid (\bar{Y}^{(n)})_t^* = Y_t^* \right\}.$$

3. Bestimmung des fairen Preises $Z_0^{(n)}$ der amerikanischen Putoption mit eingeschränktem Ausübungsrecht:

$$Z_0^{(n)} = E_Q [Y_{\bar{\tau}^{(n)}}^*].$$

4. Bestimmung des fairen Preises Z_0 der amerikanischen Putoption mit uneingeschränktem Ausübungsrecht:

$$Z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_0^{(n)}.$$

3.4 Feynman–Kac–Formeln für Derivate

Voraussetzungen

1. Sei $\hat{r} : I \times \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1.1 \hat{r} ist stetig.

1.2 \hat{r} genügt der folgenden Beschränktheitsbedingung:

$$0 \leq \hat{r}(t, s^0, \tilde{s}) \leq C.$$

2. Seien $\hat{\mu} : I \times \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}^p$ mit folgenden Eigenschaften:

2.1 $\hat{\mu}$ ist stetig.

2.2 $\hat{\mu}^{(i)}$ ist beschränkt.

3. Seien $\hat{\sigma} : I \times \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$ mit folgenden Eigenschaften:

3.1 $\hat{\sigma}^{(i,j)}$ ist stetig.

3.2 $\hat{\sigma}^{(i,j)}$ ist beschränkt.

4. Seien $\hat{Z} : \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

4.1 \hat{Z} ist stetig.

4.2 \hat{Z} genügt der folgenden Wachstumsbedingung:

$$|\hat{Z}(s^0, \tilde{s})| \leq C(1 + |s^0| + \dots + |s^p|).$$

5. Sei $u : I \times \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

5.1 $u \in \mathcal{C}^0(I \times \mathbb{R}^{p+1}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^{p+1}, \mathbb{R})$.

5.2 u genügt den folgenden Wachstumsbedingungen:

$$|u(t, s^0, \tilde{s})| \leq C(1 + |s^0| + \dots + |s^p|).$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial s^k}(t, s^0, \tilde{s}) \right| \leq C.$$

Konstitutive Gesetze

Wir nehmen an, dass die Prozesse r , μ und σ durch konstitutive Gesetze der folgenden Form gegeben sind:

$$r_t = \hat{r}(t, S_t^{(0)}, \tilde{S}_t).$$

$$\mu_t^{(i)} = \hat{\mu}^{(i)}(t, S_t^{(0)}, \tilde{S}_t).$$

$$\sigma_t^{(i,j)} = \hat{\sigma}^{(i,j)}(t, S_t^{(0)}, \tilde{S}_t).$$

Bemerkung

Nach Konstruktion besitzen der Geldkontoprozess $S^{(0)}$ sowie die Aktienpreisprozesse \tilde{S} folgende Darstellungen bzgl. des äquivalenten Martingalmaßes Q :

$$S_t^{(0)} = 1 + \int_0^t \hat{r}(s, S_s^{(0)}, \tilde{S}_s) S_s^{(0)} ds.$$

$$S_t^{(i)} = 1 + \int_0^t \hat{r}(s, S_s^{(0)}, \tilde{S}_s) S_s^{(i)} ds + \sum_{j=1}^p \int_0^t \hat{\sigma}^{(i,j)}(s, S_s^{(0)}, \tilde{S}_s) S_s^{(i)} dV_s^{(j)}.$$

Derivate mit europäischem Ausübungsrecht

Wir betrachten ein Derivat Z_T mit europäischem Ausübungsrecht. Wir nehmen an, dass die Auszahlung zur Zeit $t = T$ durch ein konstitutives Gesetz der folgenden Form gegeben ist:

$$Z_T = \hat{Z}(S_T^{(0)}, \tilde{S}_T).$$

Nach dem Prinzip der risikoneutralen Bewertung gilt für den fairen Preis Z_0 des Derivates zur Zeit $t = 0$:

$$Z_0 = E_Q \left[\exp \left(- \int_0^T \hat{r}(t, S_t^{(0)}, \tilde{S}_t) dt \right) \hat{Z}(S_T^{(0)}, \tilde{S}_T) \right].$$

Sei u eine Lösung des folgenden Cauchyschen Problems:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial t}(t, s^0, \tilde{s}) &= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^p \left(\sum_{i=1}^p \hat{\sigma}^{(k,i)}(t, s^0, \tilde{s}) \hat{\sigma}^{(l,i)}(t, s^0, \tilde{s}) s^k s^l \right) \frac{\partial^2 u}{\partial s^k \partial s^l}(t, \tilde{s}) \\ &\quad + \sum_{k=0}^p \hat{r}(t, s^0, \tilde{s}) s^k \frac{\partial u}{\partial s^k}(t, s^0, \tilde{s}) - \hat{r}(t, s^0, \tilde{s}) u(t, s^0, \tilde{s}). \end{aligned}$$

$$u(T, s^0, \tilde{s}) = \hat{Z}(s^0, \tilde{s}).$$

Nach den Feynman–Kac–Formeln gilt:

$$Z_0 = u(0, 1, \tilde{1}).$$

Derivate mit europäischem Ausübungsrecht und Barrier

Sei $G \subset \mathbb{R}^{p+1}$ offen, sei $(1, \tilde{1}) \in G$, und sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ der Rand von G . Wir betrachten ein Derivat Z_T mit europäischem Ausübungsrecht und Barrier, d.h. eine Auszahlung findet nur dann statt, wenn der Prozess $(S^{(0)}, \tilde{S})$ das Gebiet G im Zeitintervall I nicht verlässt. Wir definieren eine Stoppzeit $\tau^{(S^{(0)}, \tilde{S}, G)}$ durch:

$$\tau^{(S^{(0)}, \tilde{S}, G)} := \inf \left\{ t \in I \mid (S^{(0)}, \tilde{S}) \in \Gamma \right\}.$$

Wir nehmen an, dass die Auszahlung zur Zeit $t = T$ durch ein konstitutives Gesetz der folgenden Form gegeben ist:

$$Z_T = 1_{\{\tau^{(S^{(0)}, \tilde{S}, G)} = \infty\}} \hat{Z}(S_T^{(0)}, \tilde{S}_T).$$

Nach dem Prinzip der risikoneutralen Bewertung gilt für den fairen Preis Z_0 des Derivates zur Zeit $t = 0$:

$$Z_0 = E_Q \left[1_{\{\tau^{(S^{(0)}, \tilde{S}, G)} = \infty\}} \exp \left(- \int_0^T \hat{r}(t, S_t^{(0)}, \tilde{S}_t) dt \right) \hat{Z}(S_T^{(0)}, \tilde{S}_T) \right].$$

Sei u eine Lösung des folgenden Dirichletschen Problems:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial t}(t, s^0, \tilde{s}) &= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^p \left(\sum_{i=1}^p \hat{\sigma}^{(k,i)}(t, s^0, \tilde{s}) \hat{\sigma}^{(l,i)}(t, s^0, \tilde{s}) s^k s^l \right) \frac{\partial^2 u}{\partial s^k \partial s^l}(t, \tilde{s}) \\ &\quad + \sum_{k=0}^p \hat{r}(t, s^0, \tilde{s}) s^k \frac{\partial u}{\partial s^k}(t, s^0, \tilde{s}) - \hat{r}(t, s^0, \tilde{s}) u(t, s^0, \tilde{s}). \end{aligned}$$

$$u(T, s^0, \tilde{s}) = \hat{Z}(s^0, \tilde{s}).$$

$$u(t, s^0, \tilde{s}) \Big|_{(s^0, \tilde{s}) \in \Gamma} = 0.$$

Nach den Feynman–Kac–Formeln gilt:

$$Z_0 = u(0, 1, \tilde{1}).$$

Derivate mit amerikanischem Ausübungsrecht

Wir betrachten ein Derivat Y mit amerikanischem Ausübungsrecht. Wir nehmen an, dass die Auszahlung zur Zeit $t \in I$ durch ein konstitutives Gesetz der folgenden Form gegeben ist:

$$Y_t = \hat{Z}(S_t^{(0)}, \tilde{S}_t).$$

Nach dem Prinzip der risikoneutralen Bewertung gilt für den fairen Preis Z_0 des Derivates zur Zeit $t = 0$:

$$Z_0 = \sup \left\{ E_Q \left[\exp \left(- \int_0^\tau \hat{r}(t, S_t^{(0)}, \tilde{S}_t) dt \right) \hat{Z}(S_\tau^{(0)}, \tilde{S}_\tau) \right] \mid \tau \text{ ist Stoppzeit mit } \tau \in I \right\}.$$

Sei u eine Lösung des folgenden Stefanschen Problems:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial t}(t, s^0, \tilde{s}) &\geq \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^p \left(\sum_{i=1}^p \hat{\sigma}^{(k,i)}(t, s^0, \tilde{s}) \hat{\sigma}^{(l,i)}(t, s^0, \tilde{s}) s^k s^l \right) \frac{\partial^2 u}{\partial s^k \partial s^l}(t, \tilde{s}) \\ &\quad + \sum_{k=0}^p \hat{r}(t, s^0, \tilde{s}) s^k \frac{\partial u}{\partial s^k}(t, s^0, \tilde{s}) - \hat{r}(t, s^0, \tilde{s}) u(t, s^0, \tilde{s}). \end{aligned}$$

$$u(t, s^0, \tilde{s}) \geq \hat{Z}(s^0, \tilde{s}).$$

$$u(T, s^0, \tilde{s}) = \hat{Z}(s^0, \tilde{s}).$$

Wir definieren eine Stoppzeit $\bar{\tau}$ mit $\bar{\tau} \in I$ durch:

$$\bar{\tau} := \inf \left\{ t \in I \mid u(t, s^0, \tilde{s}) = \hat{Z}(s^0, \tilde{s}) \right\}.$$

Nach den Feynman–Kac–Formeln gilt:

$$Z_0 = u(0, 1, \tilde{1}) = E_Q \left[\exp \left(- \int_0^{\bar{\tau}} \hat{r}(t, S_t^{(0)}, \tilde{S}_t) dt \right) \hat{Z}(S_{\bar{\tau}}^{(0)}, \tilde{S}_{\bar{\tau}}) \right].$$

3.5 Modellierung von Bondmärkten

Aktienmarktmodell

Wir betrachten unser Aktienmarktmodell für den Fall $p = 1$. Für Prozesse $X^{(i)}$ bzw. $X^{(i,j)}$ mit $i, j = 1, \dots, p$ verwenden wir in diesem Abschnitt keine Indizes, d.h. wir schreiben X anstelle von $X^{(1)}$ bzw. $X^{(1,1)}$.

Geldkontoprozess

Nach Konstruktion besitzt $S^{(0)}$ folgende Darstellung:

$$S_t^{(0)} = 1 + \int_0^t r_s S_s^{(0)} ds = \exp \left(\int_0^t r_s ds \right).$$

Wir verwenden folgende Notation:

$$B_t^{(0)} := S_t^{(0)}.$$

Aktienpreisprozess

Nach Konstruktion besitzt $S^{(1)}$ folgende Darstellung bzgl. Q :

$$\begin{aligned} S_t^{(1)} &= 1 + \int_0^t r_s S_s^{(1)} ds + \int_0^t \sigma_s S_s^{(1)} dV_s \\ &= \exp \left(\int_0^t r_s ds - \frac{1}{2} \int_0^t |\sigma_s|^2 ds + \int_0^t \sigma_s dV_s \right). \end{aligned}$$

Dabei interpretieren wir $S^{(1)}$ als die Wertentwicklung einer Geldeinheit, welche zur Zeit $t = 0$ in einen *Aktienindex* (z.B. DAX, DOW JONES oder MSCI) investiert wird.

Zerobond

Wir betrachten einen Zerobond Z_T , welcher seinem Halter die Zahlung einer Geldeinheit zur Zeit $t = T$ garantiert:

$$Z_T = 1.$$

Nach dem Prinzip der risikoneutralen Bewertung gibt es eine Handelsstrategie $(H^{(0)}, H^{(1)})$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $(H^{(0)}, H^{(1)})$ ist selbstfinanzierend, d.h. der zugehörige Wertprozess $U[H^{(0)}, H^{(1)}]$ besitzt folgende Darstellung bzgl. Q :

$$\begin{aligned} (U[H^{(0)}, H^{(1)}])_t^* &= (U[H^{(0)}, H^{(1)}])_0^* + \int_0^t H_s^{(1)} d(S^{(1)})_s^* \\ &= (U[H^{(0)}, H^{(1)}])_0^* + \int_0^t \sigma_s H_s^{(1)} (S_s^{(1)})^* dV_s. \end{aligned}$$

2. $H^{(1)} (S^{(1)})^*$ besitzt folgende Regularität:

$$H^{(1)} (S^{(1)})^* \in \mathfrak{L}^2(Q).$$

Insbesondere ist $(U[H^{(0)}, H^{(1)}])^* \in \mathfrak{M}(Q)$.

3. $(H^{(0)}, H^{(1)})$ ist eine replizierende Handelsstrategie für Z_T , d.h. es gilt:

$$Z_T = (U[H^{(0)}, H^{(1)}])_T.$$

4. $U[H^{(0)}, H^{(1)}]$ besitzt folgende Darstellung:

$$(U[H^{(0)}, H^{(1)}])_t^* = E_Q[Z_T^* | \mathcal{F}_t] = E_Q \left[\exp \left(- \int_0^T r_t dt \right) \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Insbesondere gilt:

$$(U[H^{(0)}, H^{(1)}])_0 = E_Q[Z_T^*] = E_Q \left[\exp \left(- \int_0^T r_t dt \right) \right].$$

Bondpreisprozess

Wir betrachten den Bondpreisprozess $B^{(1)}$. $B^{(1)}$ beschreibt die Wertentwicklung einer Geldeinheit, welche zur Zeit $t = 0$ in den Zerobond investiert wird. Nach Konstruktion gilt:

$$B_t^{(1)} = \frac{1}{\bar{U}} (U[H^{(0)}, H^{(1)}])_t.$$

$$\bar{U} := (U[H^{(0)}, H^{(1)}])_0 = E_Q \left[\exp \left(- \int_0^T r_t dt \right) \right].$$

Nach Konstruktion ist $(B^{(1)})^* \in \mathfrak{M}(Q)$ mit folgender Darstellung bzgl. Q :

$$(B^{(1)})_t^* = 1 + \int_0^t (\beta^{(1)})_s^* dV_s = \frac{1}{\bar{U}} E_Q \left[\exp \left(- \int_0^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

$$(\beta^{(1)})_t^* := \frac{\sigma_t H_t^{(1)} (S_t^{(1)})^*}{\bar{U}}.$$

Daraus folgt:

$$B_t^{(1)} = \exp \left(\int_0^t r_s ds \right) (B^{(1)})_t^* = \frac{1}{\bar{U}} E_Q \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Handelsstrategien und Wertprozesse im Bondmarktmodell

Wir betrachten ein Portfolio $U^{(B)}$, das aus $H^{(B,0)}$ Anteilen des Geldkontos sowie $H^{(B,1)}$ Anteilen des Bonds besteht.

1. Seien $H^{(B,0)}, H^{(B,1)}$ progressiv messbar. $(H^{(B,0)}, H^{(B,1)})$ heisst *Handelsstrategie*.
2. Sei $U^{(B)}[H^{(B,0)}, H^{(B,1)}] \in \mathfrak{J}$ mit folgender Darstellung:

$$(U^{(B)}[H^{(B,0)}, H^{(B,1)}])_t = H^{(B,0)} B_t^{(0)} + H^{(B,1)} B_t^{(1)}.$$

$U^{(B)}[H^{(B,0)}, H^{(B,1)}]$ heisst *Wertprozess*.

Theorem 3.7

Sei $(H^{(B,0)}, H^{(B,1)})$ eine Handelsstrategie. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $U^{(B)}[H^{(B,0)}, H^{(B,1)}] \in \mathfrak{I}$ mit folgender Darstellung:

$$(U^{(B)}[H^{(B,0)}, H^{(B,1)}])_t = (U^{(B)}[H^{(B,0)}, H^{(B,1)}])_0 + \sum_{i=0}^1 \int_0^t H_s^{(B,i)} dB_s^{(i)}.$$

(b) $(U^{(B)}[H^{(B,0)}, H^{(B,1)}])^* \in \mathfrak{I}$ mit folgender Darstellung:

$$(U^{(B)}[H^{(B,0)}, H^{(B,1)}])_t^* = (U^{(B)}[H^{(B,0)}, H^{(B,1)}])_0^* + \int_0^t H_s^{(B,1)} d(B^{(1)})_s^*.$$

$(H^{(B,0)}, H^{(B,1)})$ heißt selbstfinanzierend, falls eine der obigen Aussagen wahr ist.

Beweis

Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Theorem 3.1.

□

Theorem 3.8

Sei $(H^{(B,0)}, H^{(B,1)})$ eine Handelsstrategie mit folgenden Eigenschaften:

1. $(H^{(B,0)}, H^{(B,1)})$ ist selbstfinanzierend.
2. $H^{(B,1)} (\beta^{(1)})^* \in \mathfrak{L}^2(Q)$.

Dann gilt:

$$(U^{(B)}[H^{(B,0)}, H^{(B,1)}])^* \in \mathfrak{M}(Q).$$

Insbesondere ist der diskontierte Wertprozess $(U^{(B)}[H^{(B,0)}, H^{(B,1)}])^*$ ein Martingal bzgl. Q .

Beweis

Nach Theorem 3.7 besitzt $(U^{(B)}[H^{(B,0)}, H^{(B,1)}])^*$ folgende Darstellung bzgl. Q :

$$\begin{aligned} (U^{(B)}[H^{(B,0)}, H^{(B,1)}])_t^* &= (U^{(B)}[H^{(B,0)}, H^{(B,1)}])_0^* + H_s^{(B,1)} d(B^{(1)})_s^* \\ &= (U^{(B)}[H^{(B,0)}, H^{(B,1)}])_0^* + \int_0^t H_s^{(B,1)} (\beta^{(1)})_s^* dV_s^{(j)}. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus der Itoschen Isometrie.

□

Derivate mit europäischem Ausübungsrecht im Bondmarktmodell

Wir betrachten ein Derivat $Z_T^{(B)}$ mit europäischem Ausübungsrecht. $Z_T^{(B)}$ beschreibt eine Zahlung zur Zeit $t = T$, welche durch einen Kontrakt festgelegt wird. Wir nehmen an, dass $Z_T^{(B)}$ folgende Regularität besitzt:

$$(Z^{(B)})_T^* \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, Q).$$

Problemstellung

Sei $Z_T^{(B)}$ ein Derivat mit europäischem Ausübungsrecht. Gesucht ist der *faire Preis* $Z_0^{(B)} \in \mathbb{R}$ zur Zeit $t = 0$ im Bondmarktmodell.

Fairer Preis im Bondmarktmodell

Sei $Z_T^{(B)}$ ein Derivat mit europäischem Ausübungsrecht, sei $(H^{(B,0)}, H^{(B,1)})$ eine Handelsstrategie, und seien folgende Voraussetzungen gegeben:

1. $(H^{(B,0)}, H^{(B,1)})$ ist selbstfinanzierend.
2. $H^{(B,1)} (\beta^{(1)})^* \in \mathfrak{L}^2(Q)$.
3. $(H^{(B,0)}, H^{(B,1)})$ ist eine replizierende Handelsstrategie für $Z_T^{(B)}$:

$$Z_T^{(B)} = (U[H^{(B,0)}, H^{(B,1)}])_T.$$

Wir definieren den fairen Preis $Z_0^{(B)}$ des Derivates $Z_T^{(B)}$ zur Zeit $t = 0$ durch:

$$Z_0^{(B)} := (U^{(B)}[H^{(B,0)}, H^{(B,1)}])_0.$$

M.a.W. der faire Preis $Z_0^{(B)}$ des Derivates $Z_T^{(B)}$ ist der Wert eines replizierenden Portfolios $U^{(B)}[H^{(B,0)}, H^{(B,1)}]$ zur Zeit $t = 0$.

Theorem 3.9 (Prinzip der risikoneutralen Bewertung im Bondmarktmodell)

Sei $Z_T^{(B)}$ ein Derivat mit europäischem Ausübungsrecht, und sei folgende Voraussetzung gegeben:

$$(\beta^{(1)})^* \neq 0 \quad \text{fast überall in } I \times \Omega.$$

Dann gilt:

(a) Es gibt eine Handelsstrategie $(H^{(B,0)}, H^{(B,1)})$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $(H^{(B,0)}, H^{(B,1)})$ ist selbstfinanzierend.
2. $H^{(B,1)} (\beta^{(1)})^* \in \mathfrak{L}^2(Q)$.
3. $(H^{(B,0)}, H^{(B,1)})$ ist eine replizierende Handelsstrategie für $Z_T^{(B)}$.

(b) Das replizierende Portfolio $U^{(B)}[H^{(B,0)}, H^{(B,1)}]$ besitzt folgende Darstellung:

$$(U^{(B)}[H^{(B,0)}, H^{(B,1)}])_t^* = E_Q[(Z^{(B)})_T^* | \mathcal{F}_t] = E_Q\left[\exp\left(-\int_0^T r_t dt\right) (Z^{(B)})_T \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

(c) Der faire Preis $Z_0^{(B)}$ des Derivates $Z_T^{(B)}$ besitzt folgende Darstellung:

$$Z_0^{(B)} = E_Q[(Z^{(B)})_T^*] = E_Q\left[\exp\left(-\int_0^T r_t dt\right) (Z^{(B)})_T\right].$$

Beweis

Der Beweis verläuft analog zum Beweis des Prinzips der risikoneutralen Bewertung im Aktienmarktmodell, Theorem 3.1.

□

Beispiel 3.3

Wir betrachten nun spezielle Derivate $Z_T^{(B)}$ mit europäischem Ausübungsrecht im Bondmarktmodell.

• Europäische Calloption

Sei $\bar{B} > 0$, und sei $\bar{t} \in I$ mit $\bar{t} < T$. Eine europäische Calloption erlaubt ihrem Halter, den Bond $B^{(1)}$ zur Zeit $t = \bar{t}$ zum Preis \bar{B} zu kaufen. Der Halter der Option erhält zur Zeit $t = \bar{t}$ also folgende Zahlung:

$$Z_{\bar{t}}^{(B)} = \max\{B_{\bar{t}}^{(1)} - \bar{B}, 0\} = \max\left\{\frac{1}{U} E_Q\left[\exp\left(-\int_{\bar{t}}^T r_s ds\right) \middle| \mathcal{F}_{\bar{t}}\right] - \bar{B}, 0\right\}.$$

Nach dem Prinzip der risikoneutralen Bewertung gilt für den fairen Preis $Z_0^{(B)}$ der europäischen Calloption zur Zeit $t = 0$:

$$\begin{aligned} Z_0^{(B)} &= E_Q[(Z^{(B)})_{\bar{t}}^*] \\ &= E_Q\left[\exp\left(-\int_0^{\bar{t}} r_s ds\right) Z_{\bar{t}}^{(B)}\right] \\ &= \max\left\{\frac{1}{U} E_Q\left[\exp\left(-\int_0^T r_s ds\right) \middle| \mathcal{F}_{\bar{t}}\right] - \bar{B} \exp\left(-\int_0^{\bar{t}} r_s ds\right), 0\right\}. \end{aligned}$$

• Europäische Putoption

Sei $\bar{B} > 0$, und sei $\bar{t} \in I$ mit $\bar{t} < T$. Eine europäische Putoption erlaubt ihrem Halter, den Bond $B^{(1)}$ zur Zeit $t = \bar{t}$ zum Preis \bar{B} zu verkaufen. Der Halter der Option erhält zur Zeit $t = \bar{t}$ also folgende Zahlung:

$$Z_{\bar{t}}^{(B)} = \max\{\bar{B} - B_{\bar{t}}^{(1)}, 0\} = \max\left\{\bar{B} - \frac{1}{U} E_Q\left[\exp\left(-\int_{\bar{t}}^T r_s ds\right) \middle| \mathcal{F}_{\bar{t}}\right], 0\right\}.$$

Nach dem Prinzip der risikoneutralen Bewertung gilt für den fairen Preis $Z_0^{(B)}$ der europäischen Calloption zur Zeit $t = 0$:

$$\begin{aligned} Z_0^{(B)} &= E_Q[(Z^{(B)})_{\bar{t}}^*] \\ &= E_Q\left[\exp\left(-\int_0^{\bar{t}} r_s ds\right) Z_{\bar{t}}^{(B)}\right] \\ &= \max\left\{\bar{B} \exp\left(-\int_0^{\bar{t}} r_s ds\right) - \frac{1}{U} E_Q\left[\exp\left(-\int_0^T r_s ds\right) \mid \mathcal{F}_{\bar{t}}\right], 0\right\}. \end{aligned}$$

• Swapkontrakt

Sei $\bar{r} > 0$. Ein Swapkontrakt legt fest, dass der Halter zur Zeit $t = T$ den Wert einer Geldeinheit, welche zur Zeit $t = 0$ in eine fest verzinsliche Anlage mit Zinsrate \bar{r} investiert wird, gegen den Wert einer Geldeinheit, welche zur Zeit $t = 0$ in das Geldkonto investiert wird, tauscht. Der Halter des Kontraktes erhält zur Zeit $t = T$ also folgende Zahlung:

$$Z_T^{(B)} = B_T^{(0)} - \exp(\bar{r}T) = \exp\left(\int_0^T r_s ds\right) - \exp(\bar{r}T).$$

Nach dem Prinzip der risikoneutralen Bewertung gilt für den fairen Preis $Z_0^{(B)}$ des Swapkontraktes zur Zeit $t = 0$:

$$\begin{aligned} Z_0^{(B)} &= E_Q[(Z^{(B)})_T^*] \\ &= E_Q\left[\exp\left(-\int_0^T r_s ds\right) Z_T^{(B)}\right] \\ &= 1 - E_Q\left[\exp\left(\int_0^T (\bar{r} - r_s) ds\right)\right]. \end{aligned}$$

In der Praxis werden Swapkontrakte häufig so abgeschlossen, dass der faire Preis $Z_0^{(B)}$ zur Zeit $t = 0$ gerade Null ist. Auflösen der obigen Gleichung liefert:

$$Z_0^{(B)} = 0 \quad \iff \quad \bar{r} = \frac{1}{T} \ln \left(\frac{1}{E_Q\left[\exp\left(-\int_0^T r_s ds\right)\right]} \right).$$

In diesem Fall ist \bar{r} die *faire Swapprate*.

Zinsstrukturmodelle

In unserem Aktienmarktmodell haben wir die Zinsrate r als einen gegebenen stochastischen Prozess betrachtet, welcher die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. r genügt der folgenden Regularitätsbedingung:

$$r \in \mathfrak{C}(Q).$$

2. r genügt der folgenden Beschränktheitsbedingung:

$$0 \leq r_t \leq C.$$

Im Rahmen der Modellierung von Bondmärkten wird r typischerweise durch konstitutive Modelle in Form von stochastischen Differentialgleichungen definiert. Für solche Modelle sind die obigen Bedingungen i.d.R. nicht erfüllt. Eine strenge mathematische Analyse dieser stochastischen Differentialgleichungen und der sich daraus ergebenden Bondmarktmodelle geht über den Rahmen des vorliegenden Textes hinaus. Deshalb beschränken wir uns an dieser Stelle auf die bloße Formulierung von konstitutiven Modellen für r und verweisen auf die zitierte Literatur.

• **Zinsstrukturmodell von Vasicek**

Seien $a, b, c, d > 0$. Wir nehmen an, dass r folgende Darstellung bzgl. P besitzt:

$$r_t = a + \int_0^t b(c - r_s) ds + \int_0^t d dW_s.$$

Nach Abschnitt 2.7 besitzt die obige lineare stochastische Differentialgleichung genau eine Lösung $r \in \mathfrak{C}(P)$. Diese besitzt folgende Darstellung bzgl. P :

$$r_t = a \exp(-bt) + c(1 - \exp(-bt)) + d \int_0^t \exp(-b(t-s)) dW_s.$$

Wir nehmen zusätzlich an, dass der Marktpreis des Risikos ρ konstant ist. Nach dem Satz von Girsanov besitzt r folgende Darstellung bzgl. Q :

$$r_t = a + \int_0^t b(\bar{c} - r_s) ds + \int_0^t d dV_s.$$

$$\bar{c} := c - \frac{d\rho}{b}.$$

Nach Abschnitt 2.7 ist $r \in \mathfrak{C}(Q)$ mit folgender Darstellung bzgl. Q :

$$r_t = a \exp(-bt) + \bar{c}(1 - \exp(-bt)) + d \int_0^t \exp(-b(t-s)) dW_s.$$

Insbesondere genügt r der Regularitätsbedingung, aber nicht der Beschränktheitsbedingung.

- **Zinsstrukturmodell von Cox–Ingerson–Ross**

Seien $a, b, c, d > 0$. Wir nehmen an, dass r folgende Darstellung bzgl. P besitzt:

$$r_t = a + \int_0^t b(c - r_s) ds + \int_0^t d|r_s|^{\frac{1}{2}} dW_s.$$

Eine Analyse dieser stochastischen Differentialgleichung geht über den Rahmen des vorliegenden Textes hinaus.

- **Grenzfall $d = 0$**

Im Grenzfall $d = 0$ reduzieren sich die Zinsstrukturmodelle von Vasicek und Cox–Ross–Ingerson auf die folgende gewöhnliche Integralgleichung:

$$r_t = a + \int_0^t b(c - r_s) ds.$$

Die Lösung r ist für $t \in [0, \infty)$ gegeben durch:

$$r_t = a \exp(-bt) + c(1 - \exp(-bt)).$$

Insbesondere gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r_t = c.$$

M.a.W. die Zinsstrukturmodelle von Vasicek und Cox–Ross–Ingerson entstehen dadurch, dass eine gewöhnliche Integralgleichung mit einem globalen Attraktor um einen stochastischen Störterm ergänzt wird.

Literaturhinweis

Siehe [15], Abschnitt 6, S. 121 ff.

References

- [1] L. Arnold. *Stochastische Differentialgleichungen*. Oldenbourg, München, 1973.
- [2] H. Bauer. *Maß- und Integrationstheorie*. De Gruyter, Berlin, 1992.
- [3] H. Bauer. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. De Gruyter, Berlin, 2002.
- [4] M. Baxter; A. Rennie. *Financial Calculus*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [5] N. Bingham; R.Kiesel. *Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives*. Springer, London, 2000.
- [6] H.P. Deutsch. *Derivate und interne Modelle*. Schäffer Poeschel, Stuttgart, 2001.
- [7] J. Delyon; S. Howison; P. Wilmott. *The Mathematics of Financial Derivatives*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [8] H. Föllmer; A. Schied. *Stochastic Finance*. De Gruyter, Berlin, 2002.
- [9] K. Glashoff; S.A. Gustafson. *Einführung in die lineare Optimierung*. Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, Darmstadt, 1978.
- [10] J.C. Hull. *Options, Futures and Other Derivatives*. Prentice-Hall, Upper Saddle River NJ, 2000.
- [11] A. Irle. *Finanzmathematik*. Teubner, Stuttgart, 1998.
- [12] I. Karatzas; S.E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, New York, 1991.
- [13] I. Karatzas; S.E. Shreve. *Methods of Mathematical Finance*. Springer, New York, 1991.
- [14] E. Korn; R. Korn. *Option Pricing and Portfolio Optimization*. AMS, Providence RI, 2000.
- [15] D. Lamberton; B. Lapeyre. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman-Hall, London, 1997.
- [16] M. Musiela; M. Rutkowski. *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer, Heidelberg, 1997.
- [17] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations*. Springer, Berlin, 1998.
- [18] S. Pliska. *Introduction to Mathematical Finance*. Blackwell, Oxford, 1997.

- [19] J.M. Steele. *Stochastic Calculuc and Financial Applications*. Springer, New York, 2001.
- [20] D. Williams. *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [21] J. Yeh. *Martingales and Stochastic Analysis*. World Scientific, Singapore, 1995.