Vorgehensmodelle zur Identifikation von Portfolios mit signifikant nichtlinearen Marktrisiken

Philipp Heger, d-fine GmbH

Dr. Boris Neubert, cominvest Asset Management GmbH

26.07.2007

Abstract

Modelle zur Quantifizierung der Marktrisiken bei Finanzdienstleistern (Kreditinstitute, Asset Manager) müssen alle wesentlichen Risiken angemessen erfassen. Die vorliegende Arbeit beschreibt ein Verfahren, anhand dessen entschieden werden kann, ob ein Portfolio in signifikanten Umfang Finanzinstrumente enthält, deren Wert sich nichtlinear mit den unterliegenden Marktrisikofaktoren ändert. Die Identifikation derartiger Portfolios mit signifikant nichtlinearen Risiken ist die Voraussetzung für die Wahl eines geeigneten Risikomodells. Es wird die Situation untersucht, in der grundsätzlich ein parametrisches Modell zur Anwendung kommt und gegebenenfalls flankierend eine Monte-Carlo-Simulation zur Abdeckung nicht-linearer Risiken durchgeführt werden muss.

1. Ausgangssituation und Zielsetzung

Die Bestimmung des §51(3) Investmentgesetz, die Beschaffenheit von zulässigen Risiko-Messsystemen für die von Kapitalanlagegesellschaften verwalteten Sondervermögen festzulegen, wurde 2004 mit der Derivateverordnung (DerivateV) in bundesdeutsches Recht umgesetzt. Die DerivateV sieht für die Ermittlung des Marktrisikopotentials von Sondervermögen, die Derivate oder strukturierte Instrumente enthalten, grundsätzlich den sogenannten qualifizierten Ansatz vor – lediglich Sondervermögen, die nur Derivate enthalten, deren Marktrisiko durch die Sensitivität gegenüber Preisänderungen des Basiswerts hinreichend genau erfasst wird, können in einem einfachen Ansatz behandelt werden. Der qualifizierte Ansatz erfordert eine Ermittlung des potentiellen Risikobetrags für das Marktrisiko auf der Grundlage eines geeigneten, eigenen Risikomodells i.S.d. §1(1) Kreditwesengesetz und stellt damit an die Marktrisikoermittlung der Sondervermögen für Kapitalanlagegesellschaften dieselben hohen Anforderungen wie an die internen Modelle der Banken.

Der potentielle Risikobetrag wird üblicherweise über den Value-at-Risk (VaR) quantifiziert, der gemäß §11 DerivateV den Verlust bezeichnet, der im Sondervermögen bei einer Haltedauer von 10 Arbeitstagen mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% nicht überschritten wird. Risikomodelle prognostizieren i.d.R. täglich eine Verteilungsannahme für die Portfoliowertänderungen über die Haltedauer, aus der der VaR als Quantil der Verteilung abgelesen wird. Folgende Risikomodelle sind marktüblich:

a) Bei den parametrischen Modellen wird ausgehend vom Delta-Normal-Ansatz eine Normalverteilung für die Wertänderungen der Renditen der Risikofaktoren vorausgesetzt, deren Standardabweichung (Volatilität) sich täglich aus der aktuellen Marktsituation neu ergibt. Barwertänderungen werden mittels linearer Sensitivitäten gegenüber den Risikofaktoren genähert.[1] Die in die Ermittlung der Volatilität des Sondervermögens eingehenden Volatilitäten und Korrelationen zwischen den Faktoren werden häufig von spezialisierten Datenprovidern bereitgestellt.

b) Bei der Historischen Simulation wird die Verteilung aus den in einem historischen, i.d.R. mindestens einjährigen Stützungszeitraum tatsächlich beobachteten Wertänderungen der Risikofaktoren aufgebaut.

c) Bei der Monte-Carlo-Simulation (MC-Simulation) wird die Verteilung der Portfoliowertänderungen errechnet, indem i.d.R. mehrere tausende Male die Wertänderungen der Risikofaktoren unter Berücksichtigung der Korrelationen aus einer multivariaten Normalverteilung[2] gezogen werden und die Wertänderungen der Kassainstrumente und der von diesen Instrumenten abgeleiteten Derivate in einer Vollbewertung ausgerechnet werden.

Die parametrischen Modelle bieten gegenüber der Historischen und der MC-Simulation den Vorteil, dass nicht nur ein VaR berechnet wird, sondern dass dieser VaR sehr einfach und mit wenigen zusätzlichen Rechenschritten auf einzelne Risikofaktoren heruntergebrochen werden kann und damit dem Asset Manager eine differenzierte Analyse seiner Risikoposition nach Allokation und Selektion ermöglicht und eine Verzahnung von Risikocontrolling und Investmentprozess unterstützt. Parametrische Modelle sind jedoch nicht in der Lage, wie in §12(2) DerivateV gefordert die nichtlinearen Zusammenhänge zwischen den Preisen von Optionsgeschäften und Kurs-, Preis- oder Zinssatzschwankungen in angemessener Weise zu berücksichtigen. In solchen Fällen ist es erforderlich, eines der unter b) oder c) beschriebenen Verfahren anzuwenden, die grundsätzlich auch nichtlineare Risiken adäquat erfassen können.

Aufgrund des geschilderten Vorteils der parametrischen Modelle wird eine Kapitalanlagegesellschaft geneigt sein, auch bei Vorliegen nichtlinearer Risiken ein parametrisches Modell in der Portfolioanalyse zu verwenden, und für das aufsichtsrechtlich geforderte Risikocontrolling ergänzend eine Historische oder MC-Simulation durchzuführen.

Während die parametrischen Modelle aufgrund der durchgängig analytischen Berechenbarkeit des VaR geringe Anforderungen an die erforderliche Ausstattung mit Rechenleistung stellen, erfordern Historische und MC-Simulation eine deutliche höhere Rechenkapazität. Vor dem Hintergrund, dass Kapitalanlagegesellschaften häufig für mehrere hundert Portfolios eine Überwachung der Marktrisiken durchführen müssen, ist es sinnvoll, lediglich diejenigen Sondervermögen auch einer Historischen oder MC-Simulation zu unterwerfen, die signifikant nichtlineare Risiken aufweisen und daher nicht mehr angemessen mit den parametrischen Modellen abgebildet werden können.

Die vorliegende Arbeit beschreibt Verfahren, wie derartige Portfolios identifiziert werden können. Dabei wird im Folgenden nur auf die Verwendung der MC-Simulation abgestellt und die Historische Simulation nicht weiter betrachtet. Dies ist insbesondere dadurch begründet, dass die Ergebnisse der parametrischen Modelle und der MC-

[1] Eine Erweiterung des Delta-Normal-Ansatzes stellt der Delta-Gamma-Ansatz dar, bei dem zusätzlich nichtlineare Sensitivitäten berücksichtigt werden.

[2] Grundsätzlich sind auch andere multivariate Verteilungen möglich.

Simulation im Gegensatz zur Historischen Simulation besser vergleichbar sind, da sie in der Regel beide auf Basis einer Verteilungsannahme und einer Kovarianz-Matrix arbeiten.

Der Artikel ist wie folgt aufgebaut: Im Abschnitt 2 werden zunächst alternative Verfahren zur Identifikation signifikanter Nichtlinearitäten diskutiert, bevor dann das nach Ansicht der Verfasser am besten geeignete, die statistische Natur der MC-Simulation berücksichtigende Verfahren ausführlich beschrieben wird. Im dritten Abschnitt wird auf relevante Aspekte für die praktische Umsetzung eingegangen. Am Ende finden sich eine Zusammenfassung und ein Ausblick auf mögliche künftige Entwicklungen.

2. Methodik

Im Folgenden werden ein auf einer Analyse der Portfoliozusammensetzung beruhendes Verfahren, ein auf das Gamma-Risiko abstellendes Vorgehen und ein statistisch basiertes System betrachtet, um aufzudecken, ob ein Sondervermögen wesentliche nichtlineare Bestandteile enthält, die die Durchführung einer MC-Simulation für das Sondervermögen erfordern.

a. Inspektion

In einfachen Fällen besteht die Möglichkeit, die Durchführung einer MC-Simulation an die Zusammensetzung eines Portfolios zu knüpfen. Beispielsweise könnte ab einer bestimmten Positionsgröße in einer Instrumentenart auf nennenswerte Nichtlinearität geschlossen werden. Ein solches Vorgehen lässt sich zwar gut automatisieren, problematisch erscheint dabei aber eine allgemeingültige Festlegung des Schwellwerts der Positionsgröße, ab der MC-VaR und parametrischer VaR auf Portfolioebene zu signifikant verschieden Ergebnissen führen.

b. Gamma-Risiko

Ein weiteres Verfahren zur Prüfung eines Sondervermögens auf nichtlineare Anteile umfasst eine Berechnung respektive Abschätzung des Gamma-Risikos. Die Entscheidung, ob eine MC-Simulation für ein Sondervermögen notwendig ist, wird an das Verhältnis zwischen den Beiträgen des Delta- und des Gamma-Anteils zum Gesamt-VaR gekoppelt.

Die Varianz der Portfoliowertänderungen in der Delta-Gamma-Methode kann analytisch berechnet werden (vgl. [1]). Fasst man den Gamma-Anteil als einen Add-On zum Delta-Risiko auf, so kann die Portfoliovarianz aufgeteilt werden in zwei Anteile:

$$\sigma^2 = {\sigma_\Delta}^2 + {\sigma_\Gamma}^2$$

Der Gamma-Anteil zum Risiko kann vernachlässigt werden, wenn er wesentlich kleiner ist als der Delta-Anteil:

$${\sigma_\Gamma}^2 << {\sigma_\Delta}^2$$

In diesem Fall würde für das Sondervermögen keine MC-Simulation durchgeführt. Problematisch erscheint auch hier die Festlegung eines Schwellwerts für das Verhältnis von Gamma- zu Delta-Risiko, ab dem das Portfolio als (signifikant) nichtlinear eingestuft wird. Für die Bestimmung des Gamma-Anteils zum Risiko sind zudem komplexe Berechnungen notwendig.[3]

---

[3] Eine Reduktion der Komplexität kann über eine Abschätzung des Gamma-Risikos erreicht werden. Die Abschätzung kann ausgehend von dem analytischen Ausdruck für die Varianz im Delta-Gamma-VaR [1]

c. Statistisch basiertes Verfahren

Das statistisch basierte Verfahren stellt auf den direkten Vergleich von VaR-Kennzahlen ab. Es beinhaltet die Durchführung einer MC-Simulation für alle Sondervermögen, die im qualifizierten Ansatz geführt werden. Die Ergebnisse werden den parametrischen VaR-Zahlen gegenübergestellt.

Weicht für ein bestimmtes Sondervermögen der MC-VaR um mehr als einen hier noch nicht näher bestimmten Faktor vom parametrischen VaR ab, so soll für dieses Sondervermögen die MC-Simulation als Verfahren zur Berechnung des VaR verwendet werden.

Bei dem Vergleich der Risikowerte ist zu beachten, dass im Rahmen einer MC-Simulation im Gegensatz zur parametrischen VaR-Berechnung die Alterung von Positionen berücksichtigt werden kann. Die Berücksichtigung der Alterung beinhaltet die Integration von Wertänderungen (Drift) aufgrund des Verstreichens von Zeit in die Risikokennzahl. Besteht dieser methodische Unterschied zwischen den beiden Risikokennzahlen, so muss vor einer Gegenüberstellung der VaR-Werte die deterministische Alterung wieder aus dem MC-VaR herausgerechnet werden. Dies kann, sofern der Drift-Term auf Portfolioebene bekannt ist, durch Addieren des Drift-Terms zum VaR-Wert geschehen.

Die Definition des Schwellenwertes für die Abweichung, d.h. die Bestimmung des Faktors für die maximal zulässige Abweichung zwischen den gesondert ermittelten VaR-Werten, stellt auf die Abschätzung des statistischen Fehlers bei der Bestimmung des Quantils mittels MC-Simulation ab. Ein Sondervermögen wird genau dann in die tägliche MC-Simulation aufgenommen, wenn die Abweichung gegenüber dem parametrischen VaR signifikant ist. Erst dann liefert die Simulation ein genaueres respektive besseres Ergebnis als die analytische lineare Berechnung.

Die Quantifizierung des statistischen Fehlers der MC-Simulation σ_{MC} ist unter Annahme einer Normalverteilung möglich. Nach Kendall kann er folgendermaßen abgeschätzt werden [2]:

$$\sigma_{MC} = \sqrt{Variance\left(\hat{Q}_{1-c}\right)} = \sqrt{\frac{c \cdot (1-c)}{N \cdot f\left(Q_{1-c}\right)^2}}$$

In dieser Gleichung bedeuten c das Konfidenzniveau des Value-at-Risk, $\hat{Q}_{1-c}$ den Schätzer für das $(1-c)$-Quantil[4], N die Anzahl an Szenarien, Q das (wahre) Quantil und $f(\ )$ die Dichte der Normalverteilung. Mit $c = 0{,}99$, $N = 4000$ und $f = f(-2{,}32635) = 0{,}02665$ erhält man beispielsweise

$$\sigma_{MC} = \sqrt{Variance\left(\hat{Q}_{1-c}\right)} = 0{,}059.$$

---

unter Vernachlässigung der Nicht-Diagonal-Elemente der Gamma-Matrix und konservativer Abschätzung der Korrelationen berechnet werden.

[4] Das (1-c)-Quantil entspricht dem negativen Value-at-Risk.

Dies entspricht 2,537% (bezogen auf das Quantil, also 0,059/2,32635). Im nächsten Schritt kann ein Konfidenz-Intervall mit der Fehlerwahrscheinlichkeit α definiert werden:

$$\left[Q_{1-c} - Q_{1-\alpha/2}\sigma_{MC}; \qquad Q_{1-c} + Q_{1-\alpha/2}\sigma_{MC}\right].$$

Mit α = 5% und dem berechneten Fehler erhält man das Intervall $[-2{,}44204;-2{,}21066]$. Dies lässt sich wie folgt interpretieren: Aufgrund der statistischen Natur der Monte-Carlo-Quantil-Schätzung streut das Ergebnis um den wahren Wert. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% liegt der Schätzwert für das Quantil in dem Intervall. In 95% der Fälle wird das Ergebnis um nicht mehr als +/- 4,97% (-2,44204/-2,32635-1) vom wahren Wert des Quantils abweichen. Das bedeutet im Umkehrschluss, dass bei Auftreten einer Abweichung größer als 4,97% die Ursache entweder statistischer Natur ist (in nur 5% der Fälle) oder auf tatsächliche Abweichungen bedingt durch die unterschiedlichen Berechnungsmethoden zurückzuführen ist.[5]

Im Folgenden sind alle Fälle, die im Rahmen der Prüfung auf Nichtlinearitäten auftreten können, sowie die jeweiligen Entscheidungen aufgeführt:

1. Portfolio enthält nur lineare Instrumente
    a) Abweichung nicht signifikant: Wahl des parametrischen VaR
    b) Abweichung signifikant: Wahl des MC-Ansatzes

In der praktischen Umsetzung können diese Fälle a priori aus der Prüfung ausgeschlossen werden (vgl. Abschnitt 3).

2. Portfolio enthält lineare und nichtlineare Instrumente
    a) Abweichung nicht signifikant: Wahl des parametrischen VaR
    b) Abweichung signifikant: Wahl des MC-Ansatzes

Ausgehend von der Nullhypothese, dass die Portfoliowertänderungen normalverteilt sind, beschreibt Fall 2a eine Klassifizierung des Portfolios in den parametrischen Ansatz, obwohl tatsächlich nichtlineare Anteile enthalten sind (Annahme der Nullhypothese), während Fall 2b eine korrekte Klassifizierung in den MC-Ansatz vornimmt (Ablehnung der Nullhypothese).

Eine Prüfung mit Ausgang 2a kann zwei Ursachen haben:

Die Nichtlinearitäten wirken sich auf Portfolioebene nur sehr gering aus. Das Monte-Carlo-Verfahren liefert in diesem Fall kein merklich besseres Ergebnis als der parametrische Ansatz. Die Wahl ist damit angemessen.

Es sind tatsächlich relevante nichtlineare Anteile in dem Portfolio vorhanden und der wahre VaR ist signifikant vom parametrischen VaR verschieden. Der betrachtete Simulationslauf weist aber einen großen statistischen Fehler dergestalt auf, dass der berechnete MC-VaR nahe am parametrischen VaR liegt. Die Wahl ist damit nicht angemessen. Das Auftreten dieser Fehlklassifizierung kann verringert werden, indem in den Simulationsläufen, die für die Prüfung auf Nichtlinearitäten herangezogen werden, eine möglichst große Anzahl an Bewertungen verwendet wird. Hierbei fällt jedoch ein

[5] Unter der Voraussetzung, dass andere Fehlerquellen wie z.B. fehlerhafte Marktdaten ausgeschlossen werden können.

überproportionaler Aufwand an, da sich die Güte nur sehr langsam mit der Szenarien-Anzahl N verbessert (Intervallbreite $\sim 1/\sqrt{N}$).

3. Praktische Umsetzung

Im Folgenden soll auf einige Aspekte der praktischen Umsetzung des in Abschnitt 2c vorgestellten Verfahrens eingegangen werden.

Die Prüfung, ob für ein Portfolio eine MC-Simulation durchgeführt werden muss, ist regelmäßig, z.B. alle 3 Monate, sowie bei Änderungen der Anlagestrategie auch ad-hoc durchzuführen. Um bei Portfolios, bei denen die Abweichung zwischen MC-VaR und parametrischen VaR nahe an der definierten Grenze liegt, einen häufigen Verfahrenswechsel zu vermeiden, kann beispielsweise eine Aufnahme in die MC-Simulation erfolgen, sobald das Verfahren dies signalisiert, während eine Herausnahme erst nach mehrmaliger Ablehnung der Klassifikation in die MC-Simulation in aufeinanderfolgenden Tests erfolgt.

Das Prüfverfahren kann ferner dahingehend verfeinert werden, dass die Frage, ob ein Portfolio signifikant nichtlineare Risiken beinhaltet, anhand eines Instrumentenkatalogs auf diejenigen Portfolios eingeschränkt wird, die überhaupt nichtlineare Instrumente enthalten.

Falls eine Verletzung eines Risikolimits durch eine Überschätzung des VaR nicht in Betracht kommt, kann – gedeckt durch das Vorsichtsprinzip – in den Fällen, indem der MC-VaR signifikant geringer als der parametrische VaR ist, zugunsten der erforderlichen DV-Ressourcen auf die Durchführung einer MC-Simulation verzichtet werden.

Die Wahl des Konfidenzniveaus, mit der die Hypothese, dass das untersuchte Portfolio linear ist, abgelehnt wird, liegt im Ermessen der Kapitalanlagegesellschaft. Nach Meinung der Verfasser stellt ein Konfidenzniveau von 95% in Verbindung mit dem daraus resultierenden maximalen Schätzfehler von 4,97% für das 99%-Quantil (bei 4000 Szenarien) einen sinnvollen Kompromiss zwischen der Trennschärfe des Verfahrens und dem möglichen Fehler in der Risikomessung dar. Bei einem Musterportfolio bestehend aus Kassainstrumenten und Optionsgeschäften auf diese Instrumente lehnt das Verfahren dann ab einem Anteil von etwa 20% bis 30% an Optionen im Portfolio die Normalverteilungsannahme ab.

Um die Wahl dieses Konfidenzniveaus zu untermauern, wurden flankierend die in MC-Simulationen ermittelten Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Wertänderungen von Musterportfolios Kolmogoroff-Smirnoff- und Anderson-Darling-Tests auf Normalität unterzogen (siehe z.B. [3]). Diese lehnen ebenfalls die Annahme einer Normalverteilung ab, sobald der Anteil nichtlinearer Instrumente am Portfolio über 20% bis 30% beträgt.

4. Zusammenfassung

Es wurden Verfahren vorgestellt, mit denen entschieden werden kann, ob in einem Portfolio signifikant nichtlineare Risiken vorliegen, die anspruchsvollere als auf dem Delta-Normal-Ansatz basierende Methoden in der Risikomessung erforderlich machen. Als praxisrelevant hat sich dabei ein Verfahren erwiesen, bei dem die Abweichung des Value-at-Risk in einer MC-Simulation von dem parametrisch ermittelten

Value-at-Risk statistisch auf eine Signifikanz geprüft wird, die es erlaubt, die Annahme einer Normalverteilung abzulehnen. Die Nutzung eines derartigen Trennverfahrens ist dann sinnvoll, wenn für die Anwendung der anspruchsvolleren und qualitativ besseren Risikomessmethodik deutlich höhere Aufwände anfallen. In der dargestellten Ausprägung wird das Verfahren seit einiger Zeit erfolgreich bei der cominvest Asset Management GmbH angewendet.

Literatur

[1] Hans-Peter Deutsch: Derivate und Interne Modelle, Schäffer-Pöschel, 3. Auflage (2004)

[2] Maurice Kendall, Alan Stuart, J. Keith Ord: Kendall's Advanced Theory of Statistics, Volume 1: Distribution Theory, A Hodder Arnold Publication; 6th edition (1998)

[3] Joachim Hartung, Bärbel Elpelt, Karl-Heinz Klösener: Statistik. Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik, Oldenbourg, 14. Auflage (2005)